



INAOE

PROPIEDADES FÍSICAS Y EVOLUCIÓN DE SINGULARIDADES ÓPTICAS.

Por:

SAÚL ISAÍAS DE LOS SANTOS GARCÍA.

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de:

**DOCTOR EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA.**

En el:

**INSTITUTO NACIONAL DE ASTROFÍSICA,
ÓPTICA Y ELECTRÓNICA.**

14 de Julio de 2017

Tonantzintla, Puebla.

Supervisada por:

Dr. Gabriel Martínez Niconoff.

Dr. Javier Muñoz López.

©INAOE 2017

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes mencionando la fuente.



**PROPIEDADES FISICAS Y EVOLUCIÓN DE
SINGULARIDADES OPTICAS.**

INDICE.

CAPITULO 1.

1.1 Introducción general y planteamiento del problema.....	9
--	---

CAPITULO 2.

2.1 Soluciones modales de la ecuación de Helmholtz.....	15
2.2 Propiedades extremales del campo óptico.....	16
2.3 Principio de Fermat.....	18
2.4 Problema extremal de camino óptico con fronteras móviles.....	21
2.5 Síntesis de regiones Focales.....	26

CAPITULO 3.

CONCEPTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL.

3.1 Introducción.....	31
3.2 Teoría de Curvas.....	32
3.2.1 Ecuaciones de Frenet - Serret.....	32
3.2.2 Vector tangente.....	33
3.2.3 Función de curvatura.....	34

3.2.4 Vector normal.....	35
3.2.5 Vector binormal.....	36
3.3 Teoría de Superficies.....	39
3.3.1 Primera forma cuadrática de Gauss.....	41
3.3.2 Segunda forma cuadrática de Gauss.....	43
3.3.3 Análisis de una curva sobre una superficie paramétrica.....	46
3.3.4 Primera curvatura y curvatura Gaussiana.....	47
3.3.5 Teorema de Euler.....	48
3.3.6 Curvatura Geodésica y curvas geodésicas.....	49
3.4 Aplicación a la difracción de un campo óptico por una curva tri- dimensional: descomposición en términos de las funciones de Airy y Pearcey.....	50
3.4.1 Introducción.....	50
3.4.2 Conclusiones.....	59
3.5 Morfogénesis, bifurcaciones y filtraje espacial sintonizable en campos ópticos.....	60
3.5.1 Introducción.....	60

3.5.2 Teoría.....	61
3.5.3 Descripción de efectos de bifurcación.....	63
3.5.4 Conclusiones.....	68

CAPITULO 4.

4.1 Procesos de onda-difusión en campos ópticos y efecto de auto-refracción.....	69
4.1.1 Introducción.....	69
4.1.2 Función de relación de dispersión para efectos de onda-difusión.....	71
4.1.3 Descripción tipo partícula en procesos ópticos de onda-difusión extremales.....	74
4.1.4 Descripción del efecto de auto-refracción y su determinación experimental.....	76
4.1.5 Conclusiones.....	78
4.1.6 Base interferométrica del efecto de auto-refracción.....	79
4.2 Propiedades topológicas de la interacción entre regiones focales tipo cúspide.....	81

4.2.1 Introducción.....	81
4.2.2 Interacción de irradiancia entre dos regiones focales.....	82
4.2.3 Interacción de amplitud.....	84
4.2.4 Conclusiones.....	88

CAPITULO 5.

PROPIEDADES FISICAS DE REGIONES FOCALES.....90

5.1 Cinemática de regiones focales.....90

5.1.1 Introducción.....	90
5.1.2 Descripción y síntesis de RF.....	92
5.1.3 Procesos de difusión en regiones focales.....	95
5.1.4 Interacción entre regiones focales.....	96
5.1.5 Conclusiones.....	99
5.1.6 Equivalencia entre el volumen del medio con índice de refracción aleatorio con la superficie dinámica rugosa.....	100
5.1.7 Procesos de difusión para regiones focales.....	103

5.2 Propiedades fractales y métricas del campo óptico en regiones focales.

5.2.1 Introducción.....	104
-------------------------	-----

5.2.2 Ecuación logística para el índice de refracción efectivo.....	105
5.2.3 Dimensión fractal.....	114
5.2.4 Efectos de auto-refracción en regiones focales.....	115
5.2.5 Conclusiones.....	116
Capítulo 6.	
6.1 Conclusiones generales y trabajo a futuro.....	118
Bibliografía.....	123

CAPITULO 1.

1.1 Introducción general y planteamiento del problema

Al analizar la propagación de campos ópticos es posible detectar alto contenido energético localizado en pequeñas regiones del espacio, conocidas como regiones focales o causticas (RF). Estas se generan en donde las trayectorias del campo óptico convergen mediante un proceso de compresión o confinamiento espacial del frente de onda. Estos procesos de compresión pueden ser inducidos físicamente en el campo óptico por alguna componente óptica por ejemplo una lente o una curva rendija con una determinada curvatura, en este caso el campo óptico es focalizado y la geometría de su región focal es definida por la envolvente de centros de curvatura de la condición de frontera [1]. En el contexto de la óptica contemporánea se han realizado investigaciones sobre los mecanismos de generación de regiones focales así como la síntesis de diversos procesos ópticos asociados a las propiedades físicas de las regiones focales, como un ejemplo se encuentran procesos de vorticidad, bifurcación, corrimientos de fase [2, 3].

Para describir algunos de los efectos en el campo óptico con una región focal (RF) presente, se debe entender que este es generado a través de un proceso no-lineal, debido a que el campo óptico emergente de un punto en la condición de frontera (transmitancia), interacciona con el campo óptico de los puntos adyacentes de esta misma. De esta manera, el campo óptico experimenta compresión generando cambios en su función de amplitud y también en su función de fase dando lugar a procesos de autorregulados los cuales se manifiestan en los cambios de la dirección de propagación

del campo óptico. Cuando este proceso es generado por el paso de un campo óptico a través de una lente de curvatura constante, el proceso de compresión es el mismo para el campo emergente de cualquier punto de la lente siguiendo el principio de Huygens [4], siendo un punto la región focal para este caso. Sin embargo esto cambia cuando la geometría del elemento óptico es irregular, por ejemplo una rendija de función de curvatura monótonamente creciente, en este sistema óptico la compresión que experimenta el campo emergente de un punto en la rendija o condición de frontera será distinta dado que la función de curvatura varía de manera distinta en cada punto. Es decir la compresión de campo depende directamente de la geometría de la condición de frontera, esta condición la extenderemos en este trabajo dando así una alternativa de análisis de las propiedades topológicas del campo óptico, esto se traduce en un análisis de las propiedades dinámicas en las distintas regiones del campo óptico. Como caso especial se estudia el fenómeno de interacción entre regiones focales de tipo Pearcey [5].

De manera natural una generalización del análisis del campo óptico con RF en su propagación está dada cuando se estudia su evolución espacial variando en el tiempo. Esta generalización es bastante apropiada al analizar los efectos no-lineales mencionados. En este contexto es viable un análisis dinámico de la evolución de campo óptico, proponiendo así la aplicación de algunos modelos dinámicos no-lineales [6-9], desarrollando estos desde el punto de vista que ofrece la teoría de estabilidad, con ello se explica de manera apropiada la existencia de bifurcaciones en el campo óptico en la vecindad de una RF. Debe mencionarse que aunque los modelos de dinámica no-lineal funcionan muy bien para explicar algunas propiedades del campo óptico con RF, este es apenas un tópico a desarrollar en trabajos futuros.

Como caso especial, en este trabajo se propone la aplicación del modelo logístico (Lotka-Volterra) estudiado en la dinámica de población. La aplicación de este modelo parte del hecho de que el proceso de compresión del campo óptico puede ser estudiado como un proceso auto-regulado dado que su evolución en distintos instantes de tiempo es el resultado colectivo de la evolución local de

este. Es decir para el campo emergente de cada punto de la condición de frontera se tendrán perturbaciones del campo emergente de los puntos vecinos, esto se puede aproximar localmente como una auto-interacción, generando de esta manera distintos valores de auto-interacción para el campo emergente de cada punto sobre la condición de frontera, estos dependerán de la función de curvatura. En este contexto es posible trasladar algunas propiedades importantes obtenidas del análisis de estabilidad de la ecuación logística, una de estas consiste en la existencia de regiones estables en las cuales son generados efectos de bifurcación. En nuestro análisis estas propiedades son asociadas a las regiones focales con lo cual se tendrán valores no-únicos para la función de fase del campo óptico, esto implica la generación de un efecto físico nuevo denominado auto-refracción, debido a que en la vecindad de la RF el índice de refracción efectivo se aproxima a cero. Es importante mencionar que en el modelo logístico es posible implementar el concepto de fractalidad, este fenómeno se presenta al analizar la evolución de los puntos fijos de la ecuación logística, una consecuencia es la propiedad de auto-semejanza en la evolución de bifurcaciones [6,7]. En nuestro estudio este concepto será retomado como una propiedad particular del campo óptico sobre una RF, esto lo hará distinguible del resto del campo óptico en donde no se tiene focalización, es decir las propiedades métricas de la función de fase del campo óptico en una RF es distinta de la métrica en la función de fase en el resto del campo.

Un modelo que propone P. Prasad es implementando la ecuación de Burgers, explicándolo de la siguiente manera: La propagación de un frente de onda no-lineal curvado es influenciado por dos procesos importantes: (i) Diferentes puntos de un frente de onda viajan con diferente rapidez dependiendo de la amplitud local conduciendo a una compresión longitudinal de rayos y (ii) Una desviación lateral de rayos que es producida debido a una distribución no-uniforme de la amplitud en el frente de onda [10]. En este trabajo de tesis se presenta evidencia experimental de esta última propiedad la cual se analiza incorporando efectos de difusión al campo óptico.

Partiendo de las ideas anteriores es posible hacer un análisis para el campo óptico en las RF en donde se pueden entender estas como ondas de choque las cuales presentan propiedades de tipo partícula [10,11].

Una vez desarrollados los conceptos anteriores en este trabajo ha surgido la necesidad de hacer una descripción más completa del campo óptico con RF presentes. Por una parte, se ha mencionado que las RF pueden ser descritas como efectos colectivos de compresión del campo óptico, mediante el modelo logístico como primera aproximación partiendo del hecho de que este es un proceso auto-regulado. Esta condición es justificada al introducir en la ecuación de Burgers un término que describe la presencia de la RF en la perturbación local del campo óptico, esto significa representar la RF como un “sumidero” de campo. Con esta condición surge también la necesidad de hacer un análisis en donde se involucren soluciones que representen ondas evanescentes del campo óptico. Con este propósito es desarrollado el análisis de transiciones de campos ondulatorios y difusivos, en donde se muestra que los efectos de difusión son predominantes sobre la RF. De manera general este análisis se desarrolla utilizando el método de funciones Green para resolver la ecuación de onda-difusión, este análisis conducirá a proponer una relación de dispersión para el cálculo del índice de refracción efectivo.

El objetivo de la tesis consiste en realizar la síntesis y estudio de las propiedades físicas de las regiones focales, en particular analizar procesos de morfogénesis y de bifurcación óptica así como procesos de entropía y fractalidad óptica, estos últimos son generados por la compresión del campo óptico y de efectos de difusión óptica, para cumplir con este objetivo, se propone la siguiente estructura de la tesis.

En el capítulo 2. Se hace presentan los conceptos de óptica sobre los cuales nos vamos a referir a lo largo de este trabajo, el análisis iniciara con el desarrollo modal de la ecuación de Helmholtz. En

esta representación podemos expresar de manera general un campo óptico, como una combinación lineal de soluciones modales que representaran ondas planas, cada una de las cuales está definida mediante una función de amplitud y una función de fase, de esta última se hace un análisis extremal para mostrar las condiciones que debe cumplir esta al tratarse de una RF. Una vez analizada la representación en espectro angular para un campo óptico y sus condiciones extremales, estas son aplicadas para la síntesis de regiones focales.

En el capítulo 3 se analiza el campo difractado por una curva en 3-D utilizando la formulación de Frenet-Serret, en esta representación las propiedades geométricas de una curva parametrizada pueden describirse por medio de la evolución de una base local definida sobre esta. Esto permite analizar el campo difractado de forma separada en tres planos estos son: Plano Osculante, Rectificante y Normal, con la ventaja de caracterizar los órdenes de perturbación geométrica de una curva en cada uno de estos planos. Consecuentemente la descripción del campo difractado es caracterizada genéricamente por las propiedades topológicas de una curva rendija en el espacio, en especial cuando se tiene la presencia de RF [12]. Esta descripción debe ser empatada con la obtenida en Teoría de catástrofes [1, 13, 14], en la cual se estudian las singularidades (RF) del campo óptico partiendo del análisis de la evolución de sus puntos de estabilidad.

En la primera sección del capítulo 4 se estudia el campo óptico difractado incluyendo la presencia de fenómenos de transporte ondulatorio y difusivo. Para este análisis se resuelve la ecuación de onda-difusión utilizando el método de funciones de Green, de donde se deduce la función de relación de dispersión con la que se describen las transiciones ondulatorio-difusivas expresadas a través de las variaciones del índice de refracción efectivo. En particular se deduce que en las RF los efectos difusivos son predominantes, en consecuencia el campo óptico exhibe propiedades tipo partícula, satisfaciendo la ecuación de Poisson, en estas condiciones el valor del índice de refracción efectivo es cercano a cero generando un nuevo efecto óptico que denominamos “efecto de auto-refracción”, el cual consiste en el doblamiento de la fase del campo óptico hacia la RF como

resultado colectivo del campo óptico auto-regulado. En la segunda sección de este capítulo se estudia la interacción entre dos RF de tipo Pearcey analizando su estructura topológica, este análisis es implementado en dos pasos, el primero es analizando interacción de irradiancia, el cual nos permite identificar regiones de organización del campo óptico. El segundo es analizando la interacción de amplitud donde se muestra que las franjas de interferencia son organizadas en torno a la distribución de irradiancia. El comportamiento topológico del campo óptico es analizado identificando regiones con diferentes funciones de fase, una de ellas corresponde con una función de catástrofe que tiene asociada una RF, la otra región puede ser aproximada por una región cuadrática. La consecuencia más importante heredada de la estructura de la función de fase, es que las franjas de interferencia emergen de las RF teniendo estas un comportamiento similar al de carga topológica, se muestran resultados experimentales de esta propiedad. [5, 15].

En el capítulo 5 se estudian las propiedades físicas resultantes de la interacción entre RF. Este análisis es desarrollado partiendo del hecho de que las RF exhiben propiedades de tipo partícula y de que la interacción entre ellas es similar a una colisión inelástica. Para este análisis se consideran RF generadas en un medio con índice de refracción aleatorio, de donde se observa que la distribución de irradiancia a lo largo de las RF cambia de acuerdo con un proceso de difusión y la colisión entre ellas presenta efectos de tipo vórtice. Este estudio es implementado resolviendo la ecuación de transporte de irradiancia. Se obtienen resultados experimentales, los cuales están en buena concordancia con el modelo teórico presentado [16].

En la segunda parte de este capítulo se hace un análisis de estabilidad para la ecuación logística, la cual se propone como un modelo para describir las fluctuaciones del campo óptico con RF, las cuales son identificadas como regiones estables de la función de fase, esta última condición es soportada por su comportamiento de tipo atractor de campo, permitiendo realizar un análisis de bifurcaciones en la función de fase modificando el índice de refracción efectivo, de acuerdo con este análisis los valores de función de fase presentarían discontinuidades, esto significa que la fase

sobre RF es multi-valuada. Complementario a este análisis se propone una definición de dimensión fractal asociada a procesos de entropía implicados en el proceso de compresión. Los resultados de este análisis están en correspondencia con la descripción de efectos de auto-refracción.

Finalmente en el capítulo 6 se presentan las conclusiones generales y se plantean futuras líneas de investigación.

CAPITULO 2.

2.1 Soluciones modales de la ecuación de Helmholtz.

En esta sección se resuelve la ecuación de Helmholtz utilizando el método de operadores, la idea de utilizar este método es analizar la estructura de los campos ópticos que cumplan la condición de ser adifraccionales en su propagación, para este caso la dirección de propagación corresponde al eje z , para este análisis partimos de la definición del operador de propagación axial A de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + A^2 \phi = 0, \quad (2.1)$$

de donde el operador A genera desplazamientos en la coordenada axial z sobre el campo representado por la función espacial $\phi = \phi(x, y, z)$, siendo este último una función propia de A , es decir se satisface la ecuación $A\phi = p\phi$, siendo p un número complejo.

Al proponer soluciones separables el campo óptico de la forma

$$\phi(x, y, z) = Z(z)f(x, y), \quad (2.2)$$

y sustituyendo Ec. (2.2) en Ec. (2.1), se obtiene que el campo óptico ϕ adquiere la forma siguiente

$$\phi = \exp(iAz)f(x, y), \quad (2.3)$$

La característica de campo adifraccional viene expresada de la condición de función propia de la sección transversal $f(x, y)$ del campo óptico bajo el operador A , esto se expresa en la siguiente ecuación

$$Af(x, y) = i\beta f(x, y), \quad (2.4)$$

Tomando en cuenta el siguiente desarrollo para la función exponencial

$$\exp(iAz) = 1 + (Az) + \frac{(Az)^2}{2!} + \frac{(Az)^3}{3!} + \dots, \quad (2.5)$$

en la Ec. (2.5) se encuentra que el campo óptico toma la siguiente forma,

$$\phi = \exp(i\beta z)f(x, y), \quad (2.6)$$

en donde β es un valor propio del operador A . Al sustituir en la ecuación de Helmholtz se obtiene que el perfil en amplitudes del modo óptico satisface la ecuación

$$\nabla_{\perp}^2 f(x, y) + (K^2 - \beta^2)f(x, y) = 0. \quad (2.7)$$

Mediante esta ecuación se describen las soluciones transversales del campo óptico ϕ , para cada valor propio β . Se debe mencionar que bajo la condición impuesta al principio de este análisis se debe cumplir la norma para cada modo óptico dada por la ecuación $A^2 = \nabla_{\perp}^2 + K^2$, mediante esta ecuación se estará estableciendo una relación de balance entre la estructura transversal con la estructura axial del campo óptico, definiendo así un modo óptico.

2.2 Propiedades extremales del campo óptico.

En la sección anterior se ha visto que un campo ondulatorio tiene sentido físico al satisfacer la ecuación de Helmholtz, en general cada una de estas soluciones es constituida por una función de amplitud $a = a(x, y, z)$ y una función de fase $L = L(x, y, z)$ configuradas de la forma general siguiente [4, 17]

$$\phi(x, y, z) = a(x, y, z) \exp(ik_0 L(x, y, z)), \quad (2.8)$$

Con la cual se puede caracterizar la evolución espacial en términos de la relación de balance entre la función de amplitud y la función de fase del campo óptico, en esta última se incluye información del medio y su balance con la trayectoria de propagación espacial del campo. El análisis de este balance estructural nos permite caracterizar efectos no-lineales presentes en un proceso de compresión de campo óptico.

Este análisis se implementa al proponer un campo óptico de la forma dada por la Ec. (2.8), que al sustituir en la ecuación de Helmholtz, y separando la parte real e imaginaria se obtiene [1]

$$\nabla^2 a + k_0^2 (n^2 - (\vec{\nabla}L)^2) a = 0, \quad (2.9.a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (a \vec{\nabla}L) + \vec{\nabla}a \cdot \vec{\nabla}L = 0, \quad (2.9.b)$$

De donde n denota el índice de refracción. En las Ecs. (2.9) el carácter dinámico de balance entre las funciones de amplitud y fase resultan evidentes a través de la Ec. (2.9.b). Si $\vec{\nabla}a \cdot \vec{\nabla}L = 0$, entonces la función de fase satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 L = 0$, es decir no existen fuentes o sumideros para la fase en la propagación del campo óptico, de esta condición se deduce que la evolución espacial de la fase es generada únicamente por las variaciones del medio dado por el índice de refracción n , cumpliéndose la condición $n^2 - (\vec{\nabla}L)^2 = 0$, la Ec. (1.9.a) se reduce a la ecuación de Laplace para la amplitud de campo $\nabla^2 a = 0$, en resumen

$$\text{Si } \vec{\nabla}a \cdot \vec{\nabla}L = 0, \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 a = 0 \quad (2.10.a)$$

$$\nabla^2 L = 0, \quad (2.10.b)$$

Cuando la condición $\vec{\nabla}a \cdot \vec{\nabla}L \neq 0$, las funciones de amplitud y fase ya no cumplen la ecuación de Laplace, con esta condición se describe la existencia de fuentes y sumideros de fase y de amplitud, consecuentemente modificando la función de amplitud en la propagación de campo. En estas circunstancias las no-linealidades existentes en el campo óptico pueden ser caracterizadas.

A continuación se realiza un análisis extremal complementario a la descripción anterior el cual corresponde a una descripción genérica de la evolución espacial del campo óptico en su propagación balanceada con la distribución espacial del medio de propagación, esta relación de balance se cumple al condicionar la fase al principio de Fermat.

2.3 Principio de Fermat.

El principio de Fermat establece que el camino óptico en la propagación de la luz es mínimo, lo cual significa que su variación es igual a cero [18]. Para este análisis consideremos sin pérdida de generalidad las variaciones de trayectoria de un campo óptico propagándose entre dos extremos fijos distintos A y B en el plano (x, y).

En este caso la función de fase del campo óptico es una función de la forma $L = L(x, y, y')$, en donde se tiene que $y' = dy/dx$ teniendo entonces la integral de camino óptico está dada de la siguiente manera

$$S = \int_A^B L(x, y, y') dx \quad (2.11)$$

Para introducir variaciones en esta última integral se considera una familia paramétrica de trayectorias generadas a través del parámetro ϵ , entonces la integral de camino óptico es determinada de la forma

$$S(\alpha) = \int_A^B L(x, y(\epsilon), y'(\epsilon)) dx \quad (2.12)$$

En este caso por simplicidad las variaciones de S se implementan a través de la variable y dada por la ecuación

$$y(x, \epsilon) = y(x) + \epsilon \delta y \quad (2.13)$$

Lo cual significa que las variaciones para cada valor de x , están dadas por el desplazamiento en torno a la curva $y(x, \epsilon = 0) = y(x)$, en la cual para cada valor del parámetro ϵ está asociada una curva desplazada respecto de la trayectoria mínima, teniendo como máximo la curva $y(x, \epsilon = 1) = y(x) + \delta y$ véase la Fig.(2.1). Para esta configuración la familia de curvas satisface la condición de extremos fijos, esto significa que $(\delta y)_A = 0$ y $(\delta y)_B = 0$.

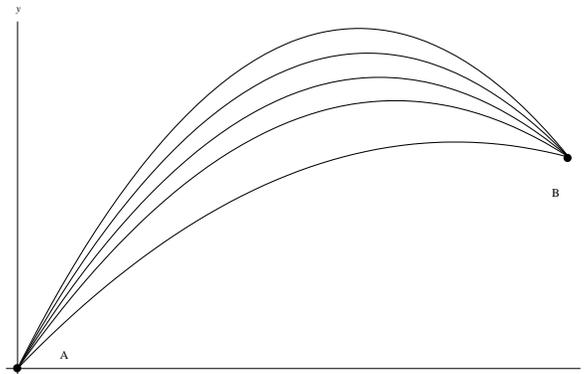


Fig. (2.1) Variación de trayectorias de campo óptico.

Las variaciones dadas en la Ec. (2.13) son definidas para cada valor de ϵ , las cuales son independientes de las operaciones de integración y derivación respecto de la coordenada x , por lo cual estas operaciones conmutan con las variaciones en y , considerando lo anterior, las variaciones de la integral de camino óptico S de la Ec. (2.12) son expresadas como

$$\delta S(\epsilon) = \int_A^B \delta L(x, y(\epsilon), y'(\epsilon)) dx \quad (2.14)$$

En donde la variación de la función de fase es desarrollada respecto de la variación de y a través del parámetro α en la siguiente ecuación y sus variaciones son expresadas como

$$\begin{aligned}\delta L &= L(x, y(x, \epsilon), y'(x, \epsilon)) - L(x, y(x), y'(x)) \\ &= \left[\frac{\delta y}{\delta \epsilon} \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\delta y'}{\delta \epsilon} \frac{\partial L}{\partial y'} \right] \delta \epsilon \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \delta y + \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right],\end{aligned}\quad (2.15)$$

Se hace notar que $\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right]$ representa un término de frontera al ser evaluado en la integral de la Ec. (2.14), siendo este igual a cero dado que $(\delta y)_A = 0$ y $(\delta y)_B = 0$. Cumpliéndose el principio de Fermat, las variaciones de camino óptico deben ser extremales por lo cual la Ec. (2.14) es igual a cero

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.16)$$

Esta última es conocida como ecuación de Euler [19]. Cuando se tiene la función de fase dada por

$$L(x, y, y') = n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} \quad (2.17)$$

Al cumplir la condición extremal y considerando que $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, se tiene la ecuación de Euler para la función de fase dada en la Ec. (2.17) es

$$\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = 0, \quad (2.18)$$

Para el caso espacial, la anterior está dada en forma vectorial

$$\vec{\nabla} n - \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = 0, \quad (2.19)$$

Por otro lado se hace notar que al definir la variación funcional de camino óptico δL y la variación diferencial dL , son definidas para este caso de manera independiente, por lo tanto se cumple que

$$dL = nds \quad \delta L = s\delta n \quad (2.20)$$

Por lo cual de la primera igualdad se obtiene $\frac{dL}{ds} = \hat{t} \cdot \vec{\nabla}L = n$, que al tomar el modulo cuadrado de ambos lados se obtiene la siguiente ecuación

$$|\vec{\nabla}L|^2 = n^2, \quad (2.21)$$

Esta última es conocida como ecuación de *iconal* y se establece como una equivalencia entre la evolución espacial de la fase de campo óptico y la estructura espacial del medio dado por el índice de refracción. Una generalización del análisis anterior es definida cuando uno de los extremos de la curva de fase que define la trayectoria de campo no es fijo, en este caso el análisis de la evolución de un conjunto de trayectorias es establecido mediante la variación del extremo final, al condicionar una relación funcional en los extremos variables se define la geometría de la curva de fase constante. En el caso lineal se seguirá teniendo condición de transversalidad. [19, 20]

2.4 Problema extremal de camino óptico con fronteras móviles.

Se realiza un análisis extremal para la funcional de camino óptico condicionando que el extremo final sea un punto sobre la curva φ que representa las regiones de fase constante. En este caso la diferencia de caminos ópticos estará dada por la variación entre la trayectoria S_1 que conecta los puntos extremos x_A y $x_B + \delta x_B$ y la trayectoria S_0 , que conecta los puntos extremos x_A y x_B , cuyas integrales de camino óptico son

$$S_1 = \int_{x_A}^{x_B + \delta x_B} L(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx \quad (2.22)$$

$$S_0 = \int_{x_A}^{x_B} L(x, y, y') dx \quad (2.23)$$

Es decir, la diferencia de camino óptico es expresada por $\delta S = S_1 - S_0$, teniendo entonces

$$\delta S = \int_{x_A}^{x_B + \delta x_B} L(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_{x_A}^{x_B} L(x, y, y') dx \quad (2.24)$$

La cual es separada de forma conveniente

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{x_B}^{x_B + \delta x_B} L(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \\ &- \int_{x_A}^{x_B} [L(x, y + \delta y, y' + \delta y') - L(x, y, y')] dx \end{aligned} \quad (2.25)$$

Al desarrollar la segunda integral, se obtiene

$$\int_{x_A}^{x_B} [L(x, y + \delta y, y' + \delta y') - L(x, y, y')] dx = \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right]_B + \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \quad (2.26)$$

De la cual el termino integral del segundo miembro de la Ec. (2.26) se anula al cumplir L la condición extremal entre los puntos x_A y x_B reduciéndose a la siguiente forma

$$\int_{x_A}^{x_B} [L(x, y + \delta y, y' + \delta y') - L(x, y, y')] dx = \left(\delta y \frac{\partial L}{\partial y'} \right)_B, \quad (2.27)$$

Por otro lado la diferencia de camino óptico entre los puntos (x_B, y_B) y $(x_B + \delta x_B, y_B + \delta y_B)$ se obtiene de consideraciones geométricas siguientes

$$(\delta y)_{(x_B + \delta x_B)} - (\delta y)_{x_B} = y'(x_B) \delta x_B, \quad (2.28)$$

De esta manera la diferencia de camino óptico entre los extremos es expresada en la siguiente manera

$$\delta S = [L(\tilde{x}_B) - (y' \frac{\partial L}{\partial y'})_{x_B}] \delta x_B + \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \right]_{x_B} (\delta y)_{x_B + \delta x_B} \quad (2.29)$$

En donde $\tilde{x}_B \in [x_B, x_B + \delta x_B]$ y $(\delta y)_{x_B + \delta x_B} = y(x_B + \delta x_B) - y(x_B)$. Finalmente la diferencia de camino óptico queda dada en la siguiente forma

$$\left[L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right]_{x_B} \delta x_B + \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \right]_{x_B} \delta y_B = 0 \quad (2.30)$$

Esta es una ecuación de que expresa la transversalidad entre la variación en el plano (x, y) con las variaciones de la funcional de fase L y se puede escribir como producto punto

$$(\delta x, \delta y) \cdot (L - y' L_{y'}, L_{y'}) = 0, \quad (2.31)$$

Para caracterizar la evolución de la región de fase constante ($dL = 0$) se promueve una relación paramétrica entre δx y δy de la forma $y = \varphi(x, s)$, por lo cual $\delta y = \varphi'(x, s)\delta x$ reduciendo la ecuación de transversalidad en términos de la función φ

$$L + (\varphi' - y')L_{y'} = 0, \quad (2.32)$$

Al considerar en esta última ecuación la fase de la forma $L(x, y, y') = n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$, se obtiene la siguiente relación de transversalidad [19, 20]

$$1 + \frac{dy}{dx} \frac{\delta y}{\delta x} = 0, \quad (2.33)$$

de esta última ecuación se tiene que las trayectorias definidas por la variación de la fase en dirección de la propagación del campo son ortogonales a la curva φ sobre la cual se definen las variaciones δL , en general la expresión dada en la Ec. (2.33) se puede escribir de la forma siguiente

$$\frac{dx}{ds} \frac{\delta x}{\delta \alpha} + \frac{dy}{ds} \frac{\delta y}{\delta \alpha} = 0, \quad (2.34)$$

En la cual se expresa la variación de la fase sobre la curva φ define regiones de fase constante respecto a la trayectoria de propagación del campo, es decir $\hat{t} \cdot \delta \vec{r} = 0$, en donde \hat{t} es el vector unitario en dirección de propagación de campo, por lo cual se tiene la condición $\vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\nabla} L = 0$. Esta condición de transversalidad no siempre se cumple, en especial cuando se tienen efectos no-lineales como es el caso de procesos de compresión de campo.

Considerando las condiciones anteriores, se debe proponer la descripción de la evolución del campo óptico de manera local introduciendo una parametrización para cada trayectoria dada por el parámetro s y un frente de onda cuya evolución es descrita a través del parámetro α , de esta manera

la variación de L en el plano (x, y) respecto a la curva definida por el parámetro de longitud de arco s esta dada por

$$\frac{dL}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (2.35.a)$$

Mientras que la variación sobre la curva definida por el parámetro α , la cual representa variaciones en dirección ortogonal a las trayectorias definidas por s , y esta dado por

$$\frac{\delta L}{\delta \alpha} = \frac{\delta x}{\delta \alpha} \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\delta y}{\delta \alpha} \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (2.35.b)$$

Mediante este sistema de ecuaciones se tiene en caso especial la siguiente condición

$$\det \begin{bmatrix} x_s & y_s \\ x_\alpha & y_\alpha \end{bmatrix} = 0 \quad (2.36)$$

[3] Que corresponde a la descripción de una región singular de fase, en este caso los vectores tangentes de ambas curvas que representan curvas de fase, no son linealmente independientes (L. I.). Esta descripción es generalizada al caso espacial cuando la evolución la fase representada por dos coordenadas curvilíneas más un parámetro (u, v, s) , se definen las curvas características que satisfacen la condición para cada valor del parámetro $s = cte$.

$$L(x(u, v), y(u, v), (u, v); s) = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \quad (2.37.a)$$

de las condiciones anteriores al eliminar el parámetro s se obtiene una expresión para la superficie envolvente, se debe destacar que esta superficie es formada por la unión de curvas características que denotan la intersección entre superficies consecutivas $L(s) = 0$ y $L(s + \delta s) = 0$, por lo cual sobre la superficie envolvente se tendrán intersecciones de curvas características cuyo límite está dado por la curva llamada *límite de regresión* y corresponde con las siguientes condiciones [19]

$$L(x, y, z; , s) = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial s^2} = 0 \quad (2.37.b)$$

Que para dos curvas características consecutivas la Ec. (2.37.b), es equivalente a las siguientes condiciones $(\hat{t} \cdot \vec{\nabla}L)_s = 0$ y $(\hat{t} \cdot \vec{\nabla}L)_{s+\delta s} = 0$, que expresadas en las coordenadas curvilíneas (u, v) , se tiene el sistema de ecuaciones

$$\left(\frac{du}{ds}L_u + \frac{dv}{ds}L_v\right)_s = 0 \quad (2.37.c)$$

$$\left(\frac{du}{ds}L_u + \frac{dv}{ds}L_v\right)_{s+\delta s} = 0 \quad (2.37.d)$$

Cuyo límite del determinante de este sistema de ecuaciones de acuerdo con la condición de límite de regresión es

$$\lim_{\delta s \rightarrow 0} \det M = (L_{uu}L_v - L_{vu}L_u)du + (L_{uv}L_v - L_{vv}L_u)dv, \quad (2.37.e)$$

Cuando esta última ecuación se anula, las coordenadas curvilíneas (u, v) corresponden en este caso a una curva singular definida por la condición

$$L_{uu}L_{vv} - L_{vu}L_{uv} = 0 \quad (2.37.f)$$

Del análisis variaciones se concluyó la condición que deben satisfacer las curvas de fase que representan regiones singulares dadas mediante la Ec. (2.36), esta equivalencia se da cuando existe una relación funcional en la variación correspondiente a las trayectorias definidas por s y α $L_s = f(L_\alpha)$, la cual define la curva singular, retomando el contexto de análisis variacional teniendo la relación funcional f se cumple que

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} \left(\frac{dL}{ds}\right) = \frac{\delta}{\delta \alpha} \left(f \left(\frac{\delta L}{\delta \alpha}\right)\right) = f' \frac{\delta^2 L}{\delta \alpha^2} \quad (2.38.a)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\delta L}{\delta \alpha}\right) = \frac{d}{ds} \left(f^{-1} \left(\frac{dL}{ds}\right)\right) = \frac{1}{f'} \frac{d^2 L}{ds^2} \quad (2.38.b)$$

Cumpléndose la ecuación de región envolvente de fase o singular

$$\frac{\delta^2 L}{\delta \alpha^2} \frac{d^2 L}{ds^2} - \frac{\delta}{\delta \alpha} \left(\frac{dL}{ds}\right) \frac{d}{ds} \left(\frac{\delta L}{\delta \alpha}\right) = 0 \quad (2.39)$$

Esta última es análoga a la Ec. (3.37.f), en donde la descripción corresponde a los vectores tangentes sobre la superficie de fase mientras que la Ec. (2.39) es descrita respecto a curvas sobre la superficie de fase. En el caso especial de que la función de fase está representada como una superficie cuyos parámetros son las coordenadas x, y , esta puede ser expresada en la forma

$$L = L(x, y) \quad (2.40)$$

El parámetro de trayectoria de campo puede ser tomado como la coordenada z , mientras que los parámetros de superficie serán las coordenadas (x, y) , en donde la condición envolvente de fase es expresada por

$$(L_{xy})^2 - L_{xx}L_{yy} = 0, \quad (2.41)$$

En este caso la región singular es analizada en la sección transversal de la dirección de la coordenada z . Cabe destacar que el análisis de variaciones en el espacio definido por las variables (x, y, x', y') cuya información es contenida en la estructura topología de la fase en las coordenadas espaciales (x, y, z) , en este sentido se realiza un análisis de la topología de la fase equivalente al análisis de variaciones.

2.5 Síntesis de regiones Focales.

La formación de regiones focales en la propagación del campo óptico, es común en la naturaleza, sin embargo la descripción geométrica de estas es interesante para la óptica física. En esta sección se describen las características geométricas desarrolladas en la sección anterior, con las cuales se pueden identificar las condiciones de singularidad de campo. En particular nuestro sistema prototipo en el cual se utiliza una condición de frontera de forma parabólica dado por

$$y = a + \frac{x^2}{4a} \quad (2.42)$$

El cual experimenta rotaciones al ser propagado, por lo cual se consideran las transformaciones de rotación siguientes

$$(x', y') = (x \cos(\alpha(a)) + \left(a + \frac{x^2}{4a}\right) \text{sen}(\alpha(a)), -x \text{sen}(\alpha(a)) + \left(a + \frac{x^2}{4a}\right) \cos(\alpha(a))) \quad (2.43)$$

Al aplicar esta transformación en la Ec. (2.43) se tendrá una ecuación de la forma

$$L = \frac{a}{4} x^4 + \frac{b}{3} x^3 + cx + d \quad (2.44)$$

al analizar las trayectorias de campo en dirección normal a la condición de frontera y la región envolvente de estas se tiene

$$\frac{dL}{dx} = ax^3 + bx^2 + c = 0 \quad (2.45.a)$$

$$\frac{d^2L}{dx^2} = 3ax^2 + 2bx = 0 \quad (2.45.b)$$

resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentra que la relación entre los parámetros a y b es

$$a^2 = \gamma b^3 \quad (2.46)$$

Con γ igual a una constante. Mediante esta última ecuación se describe la geometría de la región envolvente de fase.

En este esquema se considera un conjunto de trayectorias de propagación de campo, normales a la condición de frontera, en este caso una parábola. Esta familia de trayectorias es representada de la forma

$$L = \sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2} \quad (2.47)$$

De donde se aplica el principio de Fermat

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{(\zeta - x) + y'(\eta - y)}{\sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2}} = 0 \quad (2.48)$$

De la ecuación anterior y considerando la condición de frontera $\varphi(x, y) = 0$ se tiene la condición de transversalidad

$$1 + (y'\eta')_{\varphi=0} = 0 \quad (2.49)$$

Con $\varphi(x, y) = y - f(x)$, al derivar la Ec. (2.48), se obtiene

$$\frac{d^2L}{dx^2} = -1 + y''(\eta - y) - y'^2 \quad (2.50)$$

Es decir del principio de Fermat $\frac{dL}{dx} = 0$ se deduce la geometría de trayectorias emergentes de la condición de frontera $\varphi(x, y)$ la envolvente de esta familia de trayectorias es dada por la condición

$\frac{d^2L}{dx^2} = 0$, se resuelve el sistema de ecuaciones para las variables (ζ, η) , teniendo entonces

$$\zeta = x - y' \frac{1+y'^2}{y''} \quad (2.51.a)$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \quad (2.51.b)$$

Las cuales corresponden con las coordenadas de la envolvente de centros de curvatura de la condición de frontera $y = f(x)$. Dada la condición de frontera $\vec{r} = (x, y)$ y $\vec{\rho} = (\zeta, \eta)$, entonces la ecuación de los centros de curvatura con su condición de frontera está dada por

$$\vec{\rho} - \vec{r} = R\hat{n}, \quad (2.52)$$

En donde \hat{n} es el vector unitario normal de la curva $f(x)$ y R el radio de curvatura en cada punto. Cabe destacar que la Ec. (2.52) es una ecuación local que puede ser parametrizada en s , se tomara como parámetro la longitud de arco de la curva frontera. Finalmente se aplican las Ecs. (2.51.a) y (2.51.b) a la condición de frontera $y = ax^2$, entonces $y' = 2ax$ y $y'' = 2a$, por tanto

$$\zeta = x - 2ax \frac{1+(2ax)^2}{2a} = -4a^2x^3 \quad (2.53.a)$$

$$\eta = ax^2 + \frac{1+(2ax)^2}{2a} = \frac{1}{2a} + 3ax^2 \quad (2.53.b)$$

Cuya solución al eliminar el parámetro x , se obtiene [21]

$$\eta = \frac{1}{2a} + \frac{3}{2\sqrt[3]{2a}} \zeta^{\frac{2}{3}} \quad (2.54)$$

Que es de la forma presentada en la Ec. (2.42). Esta geometría es esquematizada en la Fig. (2.2). Como conclusiones parciales de este capítulo, se han analizado las propiedades genéricas de un campo óptico, para el objetivo de este trabajo se requieren modelar los procesos de compresión. Por una parte, mediante el desarrollo de soluciones modales de campo, se puede hacer una descomposición transversal y axial de propagación. Aplicando el principio de Hamilton-Fermat [4, 17, 18, 22], se implementa un análisis extremal, del cual se encuentran propiedades estructurales de la geometría de la trayectoria de campo, en particular se muestra que un análisis extremal conduce a las ecuaciones de rayo e *iconal*. Cuando estas no son satisfechas, las ecuaciones de Laplace para la amplitud y fase del campo óptico no se cumplen, esta propiedad está asociada con no-linealidades del campo óptico, presentes de manera importante en las regiones focales. Se ha analizado también el análisis extremal con fronteras móviles, cuyos extremos son conectados mediante una curva que en general también se puede promover como una curva de fase, en general no se cumplirá la condición de transversalidad proponiendo de esta forma que la descripción de evolución de frente de onda o morfogénesis del frente de onda se implementa como una familia de curvas parametrizadas en el caso bidimensional y una familia de superficies en el caso espacial. De manera particular se desarrolla este análisis considerando una familia de características en el plano transversal de propagación. Al analizar en la sección transversal de propagación de campo mediante el análisis de características, las cuales representan coordenadas curvilíneas de fase, cuyo determinante asociado a la matriz de transformación con las variables cartesianas, es igual a cero al evaluarse sobre una región focal también llamada región singular. Se presenta un criterio geométrico para la síntesis de regiones focales, estas son formadas por causticas o envolventes de fase [1].

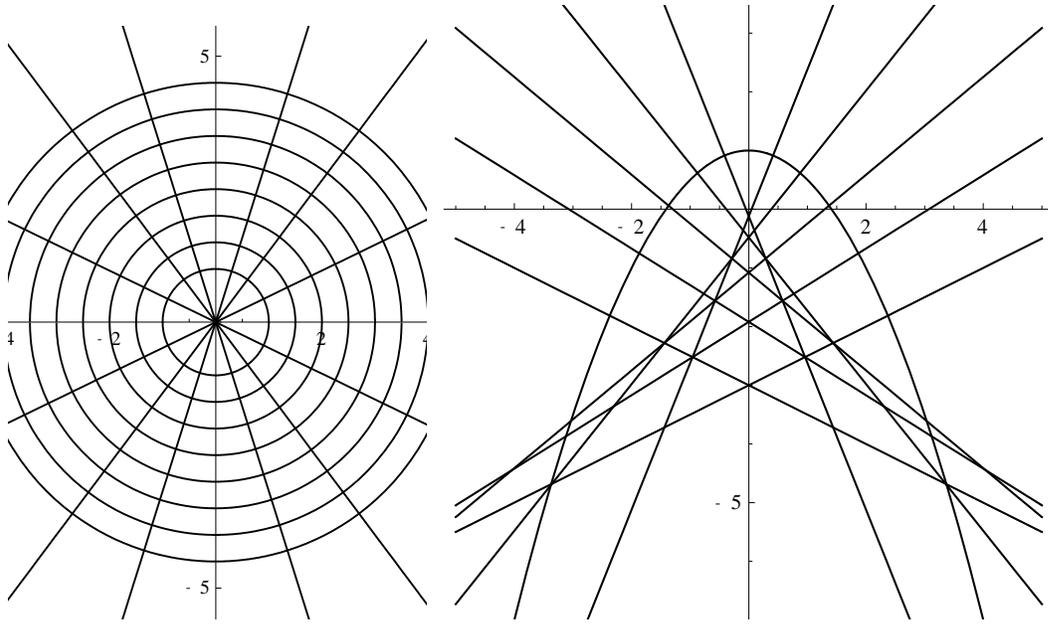


Fig. (2.2) Representación geométrica de región envolvente, en el primer caso, esta corresponde con un punto el cual intersecta tangencialmente cada trayectoria normal de una condición de frontera circular, b) en el segundo caso la región singular o focal corresponde con una curva semi-cubica o de tipo cúspide, de manera análoga esta es una envolvente de trayectorias normales de campo emergente de la condición de frontera dada por una parábola.

CAPITULO 3.

CONCEPTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL.

3.1 Introducción.

En este capítulo se hace el estudio de conceptos fundamentales de Geometría Diferencial, considerando este análisis como un punto de partida general para describir las configuraciones distintas del campo óptico, en especial de la función de fase.

La descripción geométrica de la interacción de un campo con un dispositivo óptico, es representada a través de transformaciones de coordenadas en el espacio, en este caso si un campo óptico es descrito mediante las coordenadas (x, y, z) este puede ser representado en el sistema de coordenadas curvilíneas (u, v, w) . Para describir la estructura del frente de onda y la trayectoria de propagación del campo óptico, se elige como coordenada de propagación w , al parametrizarla se tendrá una familia de superficies variando en la trayectoria del campo óptico es decir en el parámetro asociado a la coordenadas w . De esta forma la descripción completa de la evolución espacial del campo optico es dada a través de la descripción de la trayectoria de campo mediante una curva paramétrica y una familia paramétrica de superficies o frentes de onda en donde cada una tiene asociado un valor fijo del parámetro asociado a w . A continuación se analiza la estructura diferencial genérica para una curva en el espacio, una vez teniendo esta descripción, esta es aplicada para el análisis de superficies utilizando ciertas curvas especiales dadas por la intersección en distintos planos del frente de onda, en especial nos interesa hacer una descripción en el plano tangente de tal superficie y en los planos que contengan al vector normal de superficie, de manera particular analizaremos las trayectorias extremales sobre una superficie óptica, como se sabe, estas

corresponden con las curvas geodésicas de una superficie [17,18]. Con esta descripción se está dando una descripción topológica del frente de onda y de las trayectorias de campo.

3.2 Teoría de Curvas.

3.2.1 Ecuaciones de Frenet - Serret.

El siguiente análisis se desarrolla para una curva analítica en el espacio [23, 24], lo cual implica que cada punto en el espacio es definido por tres coordenadas, las cuales son funciones (también analíticas) paramétricas del valor de la longitud de arco de la curva s , teniendo así un vector asociado a cada punto de la curva descrito de la forma

$$\vec{r} = (x(s), y(s), z(s)), \quad (3.1)$$

Esta forma paramétrica permite desarrollar la expresión analítica para un punto sobre la curva cercano al punto dado por Ec. (3.1), en desarrollo de serie de Taylor

$$\vec{r}(s + \delta s) = \vec{r}(s) + \left[\frac{d\vec{r}}{ds} \right]_s \delta s + \left[\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right]_s \frac{(\delta s)^2}{2!} + \left[\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right]_s \frac{(\delta s)^3}{3!} + \dots \quad (3.2)$$

En el cual los vectores resultantes de los distintos órdenes de derivación del vector \vec{r} constituyen una base local, mediante la cual se describe la evolución de cada punto dado por \vec{r} , es decir la curva paramétrica en s . A continuación se describirán cada uno de los términos de la serie dada en la Ec. (3.2) partiendo de un análisis geométrico.

3.2.2 Vector tangente.

Considere una curva cuyos puntos están localizados en un plano, para un punto de esta curva dado por $\vec{r}(s)$, un punto de la curva en la vecindad de $\vec{r}(s)$, estará dado por el vector $\vec{r}(s + \delta s)$, al fijar una base vectorial local en el punto $\vec{r}(s)$ cada punto móvil sobre la curva puede ser expresado como una combinación lineal referida a esta base teniendo entonces

$$\vec{r}(s + \delta s) - \vec{r}(s) = \alpha \hat{t} + \beta \hat{n} \quad (3.3)$$

En la descripción de Frenet-Serret se elige el vector \hat{t} en dirección del rayo tangente a la curva en el punto $\vec{r}(s)$, y \hat{n} el vector en dirección ortogonal a \hat{t} . Es evidente que al tomar el limite

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(s+\delta s) - \vec{r}(s)}{\delta s} = \lim_{\frac{\beta}{\delta s} \rightarrow 0} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\delta s}\right)^2} \hat{t} + \frac{\beta}{\delta s} \hat{n} = \hat{t} \quad (3.4)$$

Esto puede verse en la Fig. (3.1),

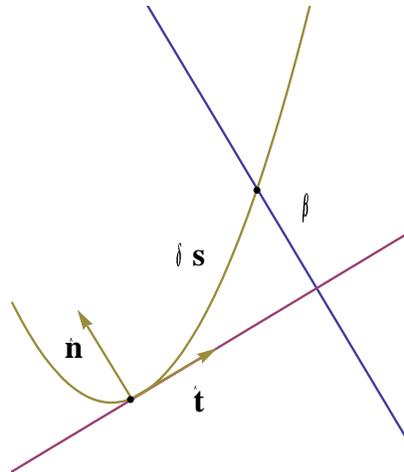


Fig. (3.1) Representación geométrica de las direcciones tangente y normal en un punto de intersección de la curva bajo análisis con una recta tangente.

3.2.3 Función de curvatura.

Esta función se define con la consideración geométrica de que una curva puede ser aproximada localmente por una sección de circunferencia subtendida por un radio R , por lo cual se tiene que R es una función paramétrica $R = R(s)$, entonces el diferencial de arco se expresa de la forma

$$\delta s = R(s)\delta\phi \quad (3.5)$$

De donde $\delta\phi$ es el ángulo subtendido por R al recorrer un segmento δs . De la construcción geométrica dada en la Fig. (3.2) se tiene la siguiente relación

$$\frac{R}{\delta s} = \frac{|\hat{t}|}{|\delta\hat{t}|} = \frac{1}{|\delta\hat{t}|} \quad (3.6)$$

De donde se deduce la que

$$\frac{|\delta\hat{t}|}{\delta s} = \frac{1}{R} = k(s) \quad (3.7)$$

De donde se define k como la función de curvatura, esta será utilizada al definir el vector normal.

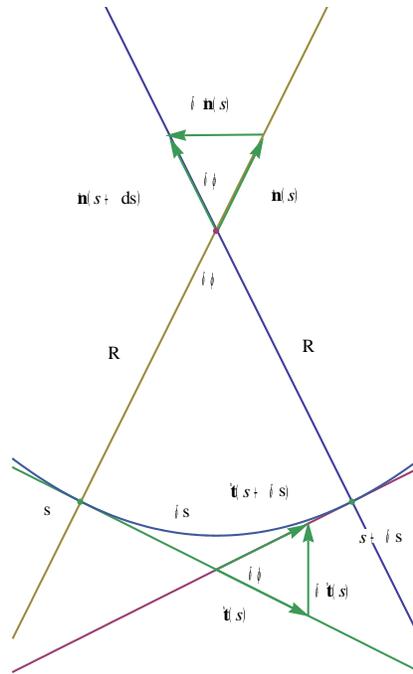


Fig. (3.2) Representación local de una curva dada por una sección de circunferencia, en donde se esquematizan los cambios de dirección del vector tangente y el vector normal, estos son relacionados a través del radio de curvatura R y una sección de circunferencia δs .

Se debe hacer notar que la Ec. (3,7) tiene una validez local en la curva por lo cual toma sentido en el límite cuando $\delta s \rightarrow 0$, es decir

$$\left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| = \frac{1}{R} = k(s) \quad (3.8)$$

esta relación será utilizada a continuación para definir las variaciones del vector normal.

3.2.4 Vector normal.

Se define el vector normal como la razón de cambio del vector tangente respecto la longitud de arco s , como se mostrara, este corresponde con el vector unitario ortogonal a la dirección tangente Fig. (3.1), cuya magnitud esta expresada en la Ec. (3.7) mientras que su dirección es ortogonal al vector

\hat{t} , dado que su módulo siempre es igual a uno mientras que su dirección cambia en dirección ortogonal la cual corresponde con la dirección del vector normal teniendo

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \hat{t}}{\delta s} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{|\delta \hat{t}|}{\delta s} \hat{n} = k\hat{n} \quad (3.9)$$

Con la definición anterior se estudia ahora el cambio del vector normal unitario \hat{n} , este vector unitario tendrá solo variaciones en la proyección ortogonal, es decir en la dirección del vector tangente \hat{t} , esto se puede representar geoméricamente usando la Fig. (3.2) de donde es evidente que

$$\frac{d\hat{n}}{ds} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \hat{n}}{\delta s} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{|\delta \hat{n}|}{\delta s} (-\hat{t}) = -k\hat{t} \quad (3.10)$$

Las Ecs. (3.8) y (3.9) son válidas para una curva en un plano, por lo que para la descripción general de una curva en el espacio debe ser analizado el caso en el cual, están contenidos puntos afuera del plano (plano osculante) generado por los vectores \hat{n} y \hat{t} , para tal descripción es necesario introducir un vector adicional llamado: vector binormal. [23-25]

3.2.5 Vector binormal.

En la sección anterior se analizó el caso cuando se tiene una curva paramétrica contenida en un plano con curvatura distinta de cero, para una descripción general se considera el caso cuando se tiene una curvatura adicional la cual se representa geoméricamente como una deformación en la curva que conecta puntos de una curva los cuales no todos pertenecen al plano osculante, para esta descripción es necesario definir el vector binormal unitario \hat{b} ortogonal al vector tangente y al vector normal, esta condición es garantizada a través de la definición siguiente

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} \quad (3.11)$$

cuyas variaciones están dadas de la siguiente forma

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = \hat{t} \times \frac{d\hat{n}}{ds} \quad (3.12)$$

En donde se ha utilizado la Ec. (3.8), dado que \hat{b} es unitario entonces se cumple que sus variaciones están dadas en dirección ortogonal

$$\hat{b} \cdot \frac{d\hat{b}}{ds} = 0, \quad (3.13)$$

Por lo tanto de la Ec. (3.11), $\frac{d\hat{n}}{ds}$ esta sobre la dirección de \hat{b} , teniendo así la siguiente expresión

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n} \quad (3.14)$$

De aquí se ha definido la función $\tau = \tau(s)$ como una función local y se introduce para medir las deformaciones de una curva con puntos fuera del plano generado por los vectores (\hat{t}, \hat{n}) , esta función es conocida como función de torsión y tiene un significado geométrico análogo a la curvatura normal.

De la definición del vector binormal, se deducen las siguientes relaciones vectoriales al ser un sistema orto-normal se cumple

$$\hat{t} = \hat{n} \times \hat{b} \quad (3.15.a)$$

$$\hat{n} = \hat{b} \times \hat{t} \quad (3.15.b)$$

De estas fórmulas se deduce la nueva expresión en el cambio del vector \hat{n}

$$\frac{d\hat{n}}{ds} = \tau\hat{b} - k\hat{t} \quad (3.16)$$

El conjunto de Ecs. (3.8), (3.13) y (3.15) son el conjunto de ecuaciones de Frenet-Serret mediante las cuales se describen de forma genérica las propiedades de una curva en el espacio

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = k\hat{n} \quad (3.17.a)$$

$$\frac{d\hat{n}}{ds} = -k\hat{t} + \tau\hat{b} \quad (3.17.b)$$

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n} \quad (3.17.c)$$

Ya que la base tri-hedrica $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ es una base orto-normal, se pueden hacer las siguientes definiciones,

$$\hat{t} = (1,0,0), \quad \hat{n} = (0,1,0), \quad \hat{b} = (0,0,1), \quad (3.18)$$

Las cuales al ser consideradas las Ecuaciones de Frenet-Serret, se tiene que de la Ec. (3.2), el vector relativo entre los puntos $\delta\vec{r}(s) = \vec{r}(s + \delta s) - \vec{r}(s)$ para dos puntos sobre la curva en la vecindad de s , se expresan como

$$\delta\vec{r}(s) = \left(\delta s - k^2 \frac{(\delta s)^3}{3!}, k \frac{(\delta s)^2}{2!} + \frac{dk}{ds} \frac{(\delta s)^3}{3!}, k\tau \frac{(\delta s)^3}{3!} \right) \quad (3.19)$$

De las cuales al aproximar $k = cte$ localmente y $k^2 \sim 0$ como un término de orden mayor entonces de la ecuación anterior se obtiene

$$\delta\vec{r}(s) = (\delta x, \delta y, \delta z) = \left(\delta s, k \frac{(\delta s)^2}{2!}, k\tau \frac{(\delta s)^3}{3!} \right) \quad (3.20)$$

Esto nos da la geometría de las curvas proyectadas en los distintos planos generados por la base local tri-hedrica véase Fig. (3.3), cuyos planos de proyección son conocidos en el análisis de geometría diferencial [23-25]

$$\text{plano osculante } (\hat{t}, \hat{n}) \quad 2\delta y = k(\delta x)^2 \quad (3.21.a)$$

$$\text{plano normal } (\hat{n}, \hat{b}) \quad 9(\delta z)^2 = 8k^2\tau^2(\delta y)^3 \quad (3.21.b)$$

$$\text{plano rectificante } (\hat{t}, \hat{b}) \quad 6\delta z = k\tau(\delta x)^3 \quad (3.21.c)$$

Las ecuaciones anteriores expresan las proyecciones de una curva en el espacio en los distintos planos generados por una base local, estas propiedades topológicas de la curva no cambian al tomar

como origen cualquier punto de la curva, siempre que esta sea analítica, en este caso se puede tomar como valor inicial en el origen $s=0$. Estas propiedades son utilizadas en Teoría de superficies desarrollado en la siguiente sección.

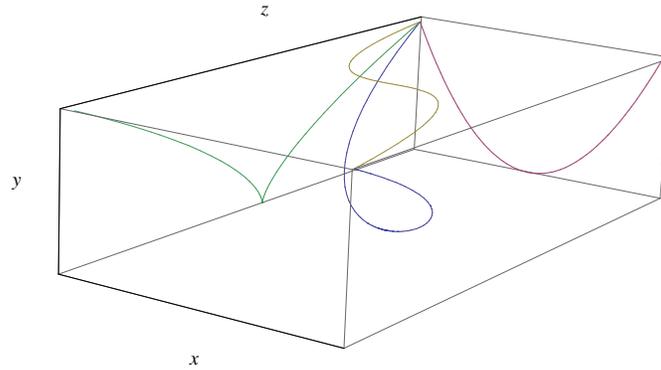


Fig. (3.3) Proyecciones de una sección curva, esta descripción es local, la proyección en el plano osculante (x,y) corresponde con una parábola, la proyección en el plano normal (y,z) corresponde con una curva tipo Pearcey y en el plano rectificante (z,x) la proyección está dada por una curva cúbica.

En general una superficie es descrita por un par de parámetros con los cuales se define un sistema local de coordenadas curvilíneas, estas en general no son ortogonales, de manera especial en las regiones singulares los vectores tangentes asociados a estas tienen una dependencia funcional asociada a la curva singular, en el contexto de óptica, esta descripción corresponde con envolventes de fase, en esta región el concepto de frente de onda deja de ser válido.

3.3 Teoría de Superficies.

El objetivo en esta sección es hacer una descripción de las propiedades genéricas de una superficie, lo cual implica analizar la evolución de sus propiedades locales. Lo anterior toma sentido al proponer cada punto de una superficie con coordenadas expresadas como funciones de dos parámetros. Considerando lo anterior, una forma de analizar esta evolución es a través de secciones dadas por la intersección de la superficie con planos elegidos de tal forma que simplifiquen en lo

posible tal descripción, estos pueden ser por medio del plano tangente en cada punto o por un plano que corte normalmente a la superficie en un punto, etc. Esta última afirmación es descrita por medio de las formas cuadráticas de Gauss en donde se comparan las direcciones del vector normal de la superficie y el vector normal o curvatura principal de la curva de intersección de la superficie con el plano normal, con esto se dará información de la curvatura de la superficie y de sus regiones singulares, en donde los vectores tangentes de las curvas características no son linealmente independientes.

Para desarrollar este análisis se parte de la forma funcional que define una superficie en la forma

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3.22)$$

Cuyos puntos están definidos por las coordenadas (x, y, z) las cuales son funciones biparametricas de (u, v)

$$x = \alpha(u, v) \quad (3.23.a)$$

$$y = \beta(u, v) \quad (3.23.b)$$

$$z = \gamma(u, v) \quad (3.23.c)$$

Una forma de analizar una superficie es a través de la estructura del conjunto de curvas definidas sobre una superficie al fijar los parámetros u y v de manera separada, esto se cumple con la condición

$$\frac{dF}{du} = 0 \quad (3.24.a)$$

$$\frac{dF}{dv} = 0 \quad (3.24.b)$$

de donde es evidente que $\vec{r}_u \cdot \vec{\nabla}F = 0$ y $\vec{r}_v \cdot \vec{\nabla}F = 0$, siendo \vec{r}_u y \vec{r}_v los vectores tangentes que corresponden a las curvas definidas al variar las coordenadas curvilíneas u y v respectivamente al desarrollar estas últimas ecuaciones se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\alpha_u F_x + \beta_u F_y + \gamma_u F_z = 0 \quad (3.25.a)$$

$$\alpha_v F_x + \beta_v F_y + \gamma_v F_z = 0 \quad (3.25.b)$$

Por lo cual se concluye que $\vec{\nabla}F$ es un vector normal al plano tangente al cual pertenecen las curvas con vectores \vec{r}_u y \vec{r}_v . De esta condición se deduce que el vector $\vec{\nabla}F$ esta en dirección $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$, es decir

$$\vec{\nabla}F = |\vec{\nabla}F|(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \quad (3.26)$$

De donde la ecuación del plano tangente está dada por la ecuación

$$(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}F = 0 \quad (3.27)$$

En donde \vec{R} y \vec{r} representan a dos puntos sobre el plano tangente de la superficie. Las propiedades de este plano son locales ya que este es definido para un par de valores de los parámetros (u, v) . Una de estas propiedades es la dependencia lineal entre los vectores tangentes \vec{r}_u y \vec{r}_v .

3.3.1 Primera forma cuadrática de Gauss.

Una manera de analizar la evolución de las curvas sobre una superficie es a través de sus vectores tangentes y sus direcciones relativas, por lo cual se estudia el diferencial de longitud de arco respecto de los parámetros (u, v)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.28)$$

$$= E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 \quad (3.29)$$

En donde se han definido las siguientes funciones de u y v ,

$$E(u, v) = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \vec{r}_u^2 \quad (3.30.a)$$

$$F(u, v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \quad (3.30.b)$$

$$G(u, v) = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \vec{r}_v^2 \quad (3.30.c)$$

En general los vectores tangentes \vec{r}_u y \vec{r}_v , no son ortogonales, una forma de medir su dependencia lineal en el plano tangente es mediante la superficie proyectada sobre este, tal cantidad corresponde con el elemento diferencial de superficie

$$d\sigma = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv \quad (3.31)$$

En cuya ecuación, el modulo del producto vectorial $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$ puede ser expresado usando las Ecs. (3.30), en donde se utiliza la siguiente identidad vectorial

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (3.32)$$

De donde el modulo del vector $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ esta dado por

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{EG - F^2} \quad (3.33)$$

Escribiendo el diferencial de superficie como

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (3.34)$$

debe notarse que de la Ec. (3.33) el factor que determina esta propiedad es $EG - F^2$.

Ya que los vectores tangentes \vec{r}_u y \vec{r}_v pertenecen al plano tangente a la superficie, es claro que la normal al plano tangente está determinada por el vector normal unitario

$$\hat{m} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (3.35)$$

Este vector es función de (u, v) . Mediante este vector se define una dirección de referencia para medir las propiedades de curvatura de la superficie como se verá en la siguiente sección.

3.3.2 Segunda forma cuadrática de Gauss.

La segunda forma cuadrática de Gauss es utilizada para medir la curvatura de una superficie ya que esta se expresa en términos de las derivadas segundas de los vectores de posición que representan los puntos de una superficie.

Para este análisis se estudia una curva sobre una superficie, cuyo vector \hat{t} tangente satisface la relación

$$\hat{t} \cdot \hat{m} = 0 \quad (3.36)$$

Esta condición nos permite estudiar la evolución de la curva respecto del vector normal de superficie al tomar su derivada

$$k\hat{n} \cdot \hat{m} + \frac{d\hat{m}}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 0 \quad (3.37)$$

De donde se tiene que al considerar un ángulo φ entre los vectores (\hat{n}, \hat{m}) , la Ec. (3.37) puede reescribirse como

$$\frac{\cos\varphi}{R} = -\frac{d\hat{m}}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (3.38)$$

Utilizando las siguientes definiciones

$$L(u, v) = -\vec{r}_u \cdot \hat{m}_u \quad (3.39.a)$$

$$M(u, v) = -\frac{1}{2}(\vec{r}_u \cdot \hat{m}_v + \vec{r}_v \cdot \hat{m}_u) \quad (3.39.b)$$

$$N(u, v) = -\vec{r}_v \cdot \hat{m}_v \quad (3.39.c)$$

La Ec. (3.37) puede escribirse en la forma

$$\frac{\cos\varphi}{R} = \frac{L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2}{E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2} \quad (3.40)$$

Ya que los vectores tangentes \vec{r}_u y \vec{r}_v son ortogonales al vector normal de superficie \hat{m} , se cumple la condición

$$\vec{r}_u \cdot \hat{m} = 0 \quad (3.41.a)$$

$$\vec{r}_v \cdot \hat{m} = 0 \quad (3.41.b)$$

Los cuales se escriben en términos de la curvatura de la superficie al derivar las Ecs. (3.41.a) y (3.41.b) respecto de u y v respectivamente, para cada caso se tienen las siguientes identidades

$$\vec{r}_u \cdot \hat{m}_u = -\vec{r}_{uu} \cdot \hat{m} \quad (3.42.a)$$

$$\vec{r}_u \cdot \hat{m}_v = \vec{r}_v \cdot \hat{m}_u = -\vec{r}_{uv} \cdot \hat{m} \quad (3.42.b)$$

$$\vec{r}_v \cdot \hat{m}_v = -\vec{r}_{vv} \cdot \hat{m} \quad (3.42.c)$$

De donde se tiene la siguiente expresión para L, M, N en términos de la curvatura de la superficie

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \quad (3.43.a)$$

$$M = \vec{r}_{uv} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \quad (3.43.b)$$

$$N = \vec{r}_{vv} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \quad (3.43.c)$$

De las ecuaciones de Frenet-Serret, se sabe que

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k_n \hat{n}, \quad (3.44.a)$$

$$k_n = \hat{n} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \quad (3.44.b)$$

En donde k_n es la curvatura normal de la curva que resulta de la intersección de la superficie con un plano en el cual está contenido el vector normal a la superficie y la normal a la curva llamada

normal principal \hat{n} que por convención es igual a la normal a la superficie \hat{m} , y por lo tanto normal a los vectores tangentes \vec{r}_u y \vec{r}_v , tomando en cuenta que la Ec. (3.44.a) puede escribirse en forma desarrollada de la siguiente forma

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d^2u}{ds^2}\vec{r}_u + \frac{d^2v}{ds^2}\vec{r}_v + \left(\frac{du}{ds}\right)^2\vec{r}_{uu} + 2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}\vec{r}_{uv} + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2\vec{r}_{vv} \quad (3.45)$$

Por lo tanto de la Ec. (3.44.b) se tiene la expresión para la curvatura k_n ,

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + dv^2} \quad (3.46)$$

De donde la curvatura normal k_n , es expresada de manera general a través del teorema de Meusnier el cual conecta el vector de curvatura y el vector normal de superficie.

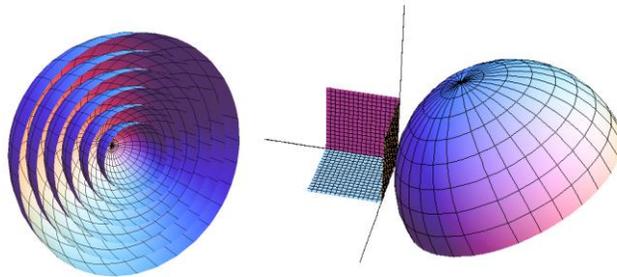


Fig. (3.4) a) Familia uni-paramétrica de superficies en este caso se toma como parámetro el radio de cada esfera, lo cual corresponde con una transformación en la curvatura de cada conjunto de características en la superficie. b) Superficie con plano tangente este corresponde con el plano rectificante tomando una trayectoria radial.

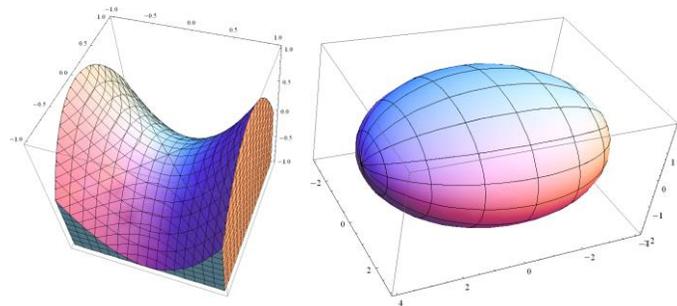


Fig. (3.5) a) Superficie con geometría hiperbólica, b) Superficie con geometría elíptica.

Cuando los vectores (\hat{n}, \hat{m}) son ortogonales, k_n es cero con lo cual se estarán analizando diferenciales de curvas sobre el plano tangente correspondiente a un punto sobre la superficie, cuya geometría queda determinada por la forma cuadrática que se puede escribir como

$$L + 2M \frac{dv}{du} + N \left(\frac{dv}{du} \right)^2 = 0 \quad (3.47)$$

Que se resuelve en forma convencional por la ecuación

$$\left(\frac{dv}{du} \right) = -\frac{M}{N} \pm \frac{\sqrt{M^2 - LN}}{N} \quad (3.48)$$

De la cual corresponde la siguiente clasificación por medio de la función $M^2 - LN$,

$$M^2 - LN < 0 \quad \textit{elíptica} \quad (3.49.a)$$

$$M^2 - LN = 0 \quad \textit{parabólica} \quad (3.49.b)$$

$$M^2 - LN > 0 \quad \textit{hiperbólica} \quad (3.49.c)$$

Como ejemplo para este análisis es de particular interés el caso de geometría parabólica, ya que como se ha mostrado en el capítulo anterior, esta representa regiones singulares o focales en el contexto de la óptica. Se debe mencionar que la clasificación anterior es dada para cada punto sobre la superficie, es decir tiene carácter local con la cual se describen propiedades geométricas de la superficie a nivel diferencial. Con esta clasificación también es posible hacer una descripción de la topología de la superficie al conocer la estructura del conjunto de sus curvas integrales. Este análisis anterior es aplicado al contexto de la óptica en los casos particulares definidos en las secciones siguientes.

3.3.3 Análisis de una curva sobre una superficie paramétrica.

En esta sección se revisa el análisis de las variaciones para una curva con sobre una superficie con parámetros u y v , considerando que s es el parámetro de la curva correspondiente a su longitud de arco, de las Ecs. (3.23) y de las Ecs. (3.17) se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{d}{ds} \vec{r} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}, \quad (3.50)$$

En donde \vec{r}_s es el vector tangente unitario de la curva, esto implica las siguientes ecuaciones

$$\sqrt{E} \cos \alpha = \vec{r}_u \cdot \frac{d}{ds} \vec{r} = E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds}, \quad (3.51.a)$$

$$\sqrt{E} \operatorname{sen} \alpha = \left| \vec{r}_u \times \frac{d}{ds} \vec{r} \right| = H \left| \frac{dv}{ds} \right|, \quad (3.51.b)$$

siendo α es el ángulo formado por los vectores \vec{r}_u y $\frac{d}{ds} \vec{r}$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds} \right), \quad (3.52.a)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{H}{\sqrt{E}} \left| \frac{dv}{ds} \right|, \quad (3.52.b)$$

cuando $F = 0$ las ecuaciones anteriores se reducen a la forma $\cos \alpha = \sqrt{E} \frac{du}{ds}$ y $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{G/E} \left| \frac{dv}{ds} \right|$,

las cuales corresponden a un sistema ortogonal.

3.3.4 Primera curvatura y curvatura Gaussiana.

Este análisis corresponde a curvas sobre una superficie, con torsión igual a cero, por lo cual se cumple la siguiente condición

$$\hat{n}_u \frac{du}{ds} + \hat{n}_v \frac{dv}{ds} = -k \left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} \right) \quad (3.53)$$

Que es equivalente a la Ec. (3.10). Y al aplicar el producto punto con \vec{r}_u y \vec{r}_v respectivamente, se obtienen las expresiones

$$L \frac{du}{ds} + M \frac{dv}{ds} = k(E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds}), \quad (3.54.a)$$

$$M \frac{du}{ds} + N \frac{dv}{ds} = k(F \frac{du}{ds} + G \frac{dv}{ds}), \quad (3.54.b)$$

O bien, de manera equivalente,

$$(kE - L) \frac{du}{ds} + (kF - M) \frac{dv}{ds} = 0, \quad (3.55.a)$$

$$(kF - M) \frac{du}{ds} + (kG - N) \frac{dv}{ds} = 0, \quad (3.55.b)$$

resolviendo este sistema de ecuaciones respecto de las coordenadas curvilíneas se tiene la ecuación de cuadrática en la curvatura k de la forma

$$(kE - L)(kG - N) = (kF - M)^2, \quad (3.56)$$

Siendo k_1 y k_2 las raíces de la ecuación cuadrática anterior, se define la *primera curvatura* denotada por J

$$J = k_1 + k_2 \quad (3.57.a)$$

Y segunda curvatura o *curvatura de Gauss* denotada por K

$$K = k_1 k_2 \quad (3.57.b)$$

Mediante estas dos últimas propiedades es posible caracterizar propiedades geométricas de una superficie, tales como concavidad o convexidad mediante una sección transversal de la superficie en dirección de u o v respectivamente.

3.3.5 Teorema de Euler.

En el caso especial cuando $F = 0$ y $M = 0$, la Ec. (3.56) toma la siguiente forma

$$(kE - L)(kG - N) = 0, \quad (3.58)$$

Cuyas raíces quedan determinadas en la forma siguiente

$$k_1 = \frac{L}{E} \quad k_2 = \frac{N}{G}, \quad (3.59)$$

Del teorema de Meusnier Ec. (3.46) con $F = 0$, y utilizando las Ec. (3.56) y Ec. (3.52) se obtiene la siguiente relación

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi, \quad (3.60)$$

conocida como el teorema de Euler. Ya que la curva de la que se trata en este análisis corresponde a la intersección de un plano que contiene al vector normal a la superficie con la superficie misma, en este caso sus vectores tangentes son ortogonales al vector de curvatura de la curva, este coincide con el vector normal a la superficie.

3.3.6 Curvatura geodésica y curvas geodésicas.

El vector de curvatura de una curva en el espacio y sobre una superficie paramétrica, puede ser descompuesto de manera general en dos direcciones dadas por una base ortogonal formada por el vector normal \hat{m} y otro por un vector \hat{T} tangente a la superficie,

$$k\hat{n} = k_n\hat{m} + k_g\hat{T} \quad (3.61)$$

Por otro lado, se satisface la ecuación siguiente

$$\hat{T} = \hat{m} \times \hat{t} \quad (3.62)$$

Por lo cual la curvatura geodésica se obtiene de la siguiente relación vectorial

$$k_g = k\hat{n} \cdot (\hat{m} \times \hat{t}) \quad (3.63)$$

Que utilizando las Ecs. (3.30)

$$k_g = -\frac{k}{H} [(Fu' + Gv')(\vec{r}_u \cdot \hat{n}) - (Eu' + Fv')(\vec{r}_v \cdot \hat{n})] \quad (3.64)$$

Obteniendo de la Ec. (3.45) las siguientes expresiones,

$$\vec{r}_u \cdot (k\hat{n}) = Eu'' + Fv'' + \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right) v'^2 \quad (3.65.a)$$

$$\vec{r}_v \cdot (k\hat{n}) = Fu'' + Gv'' + \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right) u'^2 + E_v u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 \quad (3.65.b)$$

Esto significa que cuando $\hat{n} = \hat{m}$, el vector de curvatura no tiene componente tangencial sobre la superficie, por lo cual la curvatura geodésica es nula

$$\vec{r}_u \cdot \hat{n} = 0 \quad y \quad \vec{r}_v \cdot \hat{n} = 0, \quad \Rightarrow \quad k_g = 0, \quad (3.66)$$

las curvas que cumplen con esta condición son conocidas como *curvas geodésicas* o simplemente *geodésicas* [23-25]

3.4 Aplicación a la difracción de un campo óptico por una curva tri-dimensional: descomposición en términos de las funciones de Airy y Pearcey.

3.4.1 Introducción.

El campo de difracción de transmitancias planas contenidas en una curva rendija genera regiones causticas cuya geometría puede ser calculada a partir de la función de curvatura de la condición de

frontera [26]. El campo propagado en este análisis puede ser considerado como un cilindro con eje ortogonal al plano de transmitancia siendo la región caustica las paredes de este [27]. Las regiones causticas separan dos regiones con diferentes propiedades físicas. Una de ellas tiene una función de fase uní-valuada mientras que la otra región tiene una función de fase multi-valuada, esta condición implica la presencia de dislocaciones de fase sobre la región caustica; consecuentemente propiedades físicas importantes, tales como entropía y vorticidad. Además sobre las regiones causticas pueden ser generadas propiedades adiabáticas en la función de fase [3,28], que físicamente significa que las regiones causticas no presentan comportamiento ondulatorio. Evidencia experimental de estos efectos puede encontrarse en un trabajo previo [29]. De esta manera, un tópico muy importante a investigar es el establecimiento de la relación entre geometría de distintos tipos de regiones causticas con la función de transmitancia. El caso más simple ocurre cuando el campo óptico emerge de una transmitancia plana conteniendo una curva rendija, que tiene cambios solamente en la función de curvatura [15, 29, 30]. En el presente estudio, damos un paso más y analizamos el campo óptico cuando la condición de frontera es una curva rendija tri-dimensional 3-D, es decir la curva transmitancia tiene curvatura y torsión distintas de cero. El estudio es realizado describiendo la curva rendija usando un sistema de referencia tri-hedrico, caracterizado por las ecuaciones de Frenet-Serret [31]. En este enfoque el campo difractado puede ser analizado de forma separada en tres campos ópticos, en donde cada uno tiene como condición de frontera generada por la proyección de una transmitancia de rendija en cada uno de los planos tri-hedricos. Los campos asociados con transmitancia conteniendo una curva rendija circular cuando esta es iluminada con una onda plana con incidencia normal genera campo no difractado cuya geometría corresponde con haces Bessel de orden cero [32]. Modificando el ángulo de iluminación a través de una rotación en la transmitancia, la geometría del campo de difracción cambia dramáticamente, generando una región caustica de tipo cúspide [33]. Como es mostrada en la figura 1.

La estructura cilíndrica es fácilmente identificada; la base del cilindro es la región caustica cúspide, y la región multi-valuada es formada por la envolvente de los puntos interiores siendo esta la región caustica. Esto implica que, a través de la región caustica, la amplitud del campo óptico es discontinua, la cual genera un proceso de entropía [10]. Desde el punto de vista matemático, una transformación diferencial en la condición de frontera genera campos ópticos que no diferenciables, esto significa que el campo de difracción depende de manera relevante de la configuración de iluminación. Por lo cual es muy importante hacer una descripción tomando un sistema de referencia adecuado. Esto puede ser establecido describiendo la curva 3-D en forma paramétrica:

$$\vec{\Psi}(s) = (\xi(s)\eta(s)\zeta(s)) \quad (3.67)$$

En donde s es la longitud de arco de la curva. El sistema de referencia local es identificado usando las ecuaciones de Frenet-Serret:

$$\hat{T} = \frac{d\vec{\Psi}(s)}{ds},$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \rho\hat{N} \quad \frac{d\hat{N}}{ds} = -\gamma\hat{T} \quad \frac{d\hat{B}}{ds} = -\rho\hat{T} + \gamma\hat{B}, \quad (3.68)$$

Donde ρ y γ son la curvatura y torsión de la curva, respectivamente; \hat{T} es el vector tangente; \hat{N} es el vector normal; y $\hat{B} = \hat{N} \times \hat{T}$ el vector bi-normal. Ese conjunto de vectores es orto-normal; este induce un sistema de referencia local conocido como sistema tri-hedrico [31]. Del conjunto de vectores, tres planos mutuamente ortogonales son identificados. Los vectores \hat{T} y \hat{N} generan el plano osculante, los vectores \hat{T} y \hat{B} generan el plano rectificante, y los vectores \hat{N} y \hat{B} generan el plano normal. De esta forma al definir el vector tangente sobre el eje x, el vector normal sobre el eje y, y el vector bi-normal \hat{B} sobre el eje z, como es mostrado en la Fig. (3.7). Sobre el sistema de referencia, las ecuaciones de Frenet-Serret están dadas por Ec. (3.68) adquieren la forma

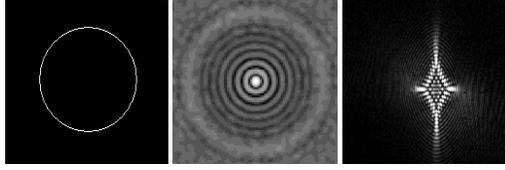


Fig.(3.6) a) Transmitancia caracterizada por una rendija circular b) campo de difracción, generado al iluminar la condición de frontera circular generando un haz Bessel de orden cero, c) campo de difracción donde se genera una región tipo cúspide al iluminar a un ángulo de 30° .

$$\frac{dx}{ds} = 1 \quad \frac{d^2x}{ds^2} = 0 \quad \frac{d^3x}{ds^3} = -\rho^2 \quad (3.69.a)$$

$$\frac{dy}{ds} = 0 \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \rho \quad \frac{d^3y}{ds^3} = \rho' \quad (3.69.b)$$

$$\frac{dz}{ds} = 0 \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0 \quad \frac{d^3z}{ds^3} = \rho\gamma \quad (3.69.c)$$

Donde ρ' es la derivada del radio de curvatura respecto a la longitud de arco. La curva solución correspondiente a cada plano está dada por

$$2y = \rho x^2 \quad (3.70.a)$$

$$6z = \rho\gamma x^3 \quad (3.70.b)$$

$$9\rho z^2 = 2\gamma^2 y^3 \quad (3.70.c)$$

Los detalles de los resultados están dados por Ecs. (3.53.a)-(3.53.c) pueden encontrarse en [31].

Los comentarios previos indican que una transmitancia en 3-D puede ser descompuesta en tres transmitancias mutuamente perpendiculares. Ec. (3.70.a) corresponde a la transmitancia sobre el plano osculante; esta es una rendija de tipo parabólico escalada por la curvatura. La transmitancia correspondiente al plano rectificante, Ec. (3.70.b), es una curva rendija de tipo cubica escalada por el producto de la curvatura y la torsión. La transmitancia en el plano normal, Ec (3.70.c), es una rendija de tipo cúspide. Para esta descomposición en la condición de frontera tri-dimensional, el campo difractado puede ser descrito por la superposición de estos tres campos ópticos, como es

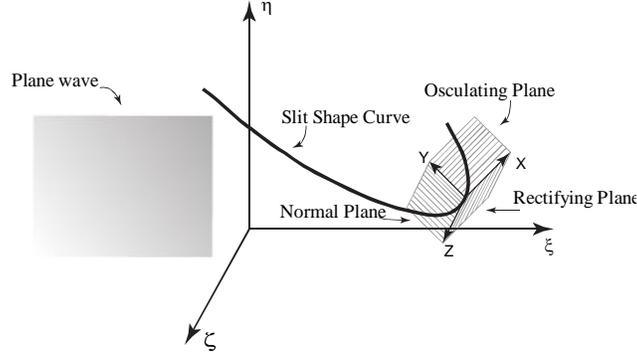


Fig. (3.7) Descripción de una curva en el espacio 3-D usando la base tri-hedrica.

descrito abajo. El estudio es realizado iluminando una curva rendija 3-D con una onda plana. El vector de onda \vec{k} en el sistema de referencia tri-hedrico, tiene componentes $\vec{k} = |\vec{k}|(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, donde (α, β, γ) son los ángulos entre k y los ejes correspondientes (x, y, z) . El campo de difracción emergente del plano osculante y rectificante es

$$\phi_{xy} = \iint \delta \left(y - \frac{\rho}{2} x^2 \right) \frac{\exp(ikr \cos \alpha)}{r} dx dy, \quad (3.71.a)$$

$$\phi_{xz} = \iint \delta \left(z - \frac{\rho \gamma}{6} x^3 \right) \frac{\exp(ikr \cos \beta)}{r} dz dx \quad (3.71.b)$$

Donde r es la distancia de propagación del campo óptico, y δ es la función delta de Dirac. Usamos esta función ya que esta toma sentido cuando su argumento es cero, recuperando Ecs. (3.71.a) y (3.71.b). Ec. (3.70.c) corresponde a la función de Pearcey, y esta genera una caustica de tipo cúspide. Ec. (3.71.a) corresponde a la función de Airy, y esta genera una caustica con doblez [33]. En la Fig. (3.8), mostramos los resultados experimentales para estos dos casos. El campo difractado correspondiente a la rendija descrita por Ec. (3.70.c) es

$$\begin{aligned} \phi_{yz} &= \iint \delta \left(z^2 - \frac{2\gamma^2}{9\rho} y^3 \right) \frac{\exp(ikr \cos \chi)}{r} dz dy \\ &= \int \exp \frac{i\pi}{\lambda x} (y^2 + ay^3) \exp \left(-i2\pi \frac{yy_0}{\lambda x} \right) \exp \left(2\pi \frac{a^{1/2} y^{3/2} z_0}{\lambda x} \right) dy \end{aligned} \quad (3.72)$$

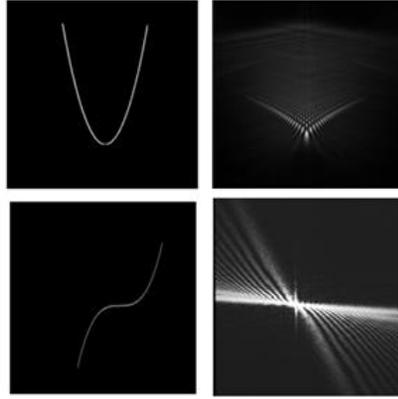


Fig. (3.8) Resultados experimentales del lado izquierdo se muestran las condiciones utilizadas, izquierda) se muestran sus correspondientes campos de difracción.

Donde $a = \frac{2\gamma^2}{9\rho}$. Agrupando términos y expandiendo el término cosenoidal en serie de potencias, la función de amplitud adquiere la forma de una serie de funciones de Airy generalizadas $A_i(y, n)$:

$$\phi_{yz} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z) A_i(y, n). \quad (3.73)$$

La convergencia de esta serie no es un problema matemático trivial; por esta razón, analizamos la integral, considerando tal problema desde un punto de vista geométrico y usando una teoría geométrica de difracción [34]. Debe ser notado que la geometría de la transmitancia puede ser considerada como la unión de dos curvas, teniendo en común un punto generando así la rendija cuspide. Interpretamos el campo óptico como la interferencia entre dos campos ópticos emergiendo de cada rama. La descripción de la geometría de las franjas de interferencia es obtenida, tomando como referencia la línea OS, que es tangente a cada rama en el punto cuspide, como es mostrado en la Fig. (3.9). Como una consecuencia de la teoría geométrica de difracción, el vector \vec{k} debe ser normal a cada punto sobre la curva rendija [19,33, 34]. Esto significa que, en un punto arbitrario en la región 1 esquematizada en Fig. (3.9), solo dos trayectorias lineales son intersectadas; consecuentemente, el campo difractado puede ser aproximado localmente como

$$\begin{aligned}\phi_{yz} &= \iint \delta(z^2 - ay^3) \frac{\exp(ikr\cos\chi)}{r} dzdy \\ &\approx A \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + A \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}),\end{aligned}\quad (3.74)$$

La irradiancia toma la forma

$$I(x, y, z) = 2|A|^2 (1 + \cos(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}). \quad (3.75)$$

La estructura global de las franjas de interferencia depende del vector $\Delta\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$, que contiene la información de la curvatura de la función de transmitancia. La geometría de las franjas de interferencia pueden ser deducidas del argumento del termino cosenoidal. Sin pérdida de generalidad, podemos solo considerar las regiones de máximos de la interferencia dados por

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} = 2m\pi, \quad (3.76)$$

Donde m es un entero que representa el orden de interferencia. La geometría de las franjas es obtenida graficando el vector $\Delta\vec{k}$ sobre el plano y uniendo todos los puntos por una curva continúa como es mostrado en la Fig. (3.10). Contra-propagando las trayectorias lineales hacia la región 2, es posible determinar la presencia de la región focal generada por la envolvente del conjunto de trayectorias normales de cada rama, como es mostrado en la Fig. (3.9). La geometría de franjas mostrada en la Fig. (3.10) con la geometría de la región focal mostrada en Fig. (3.9) justifica la rendija con forma deltoide del campo óptico mostrado en Fig. (3.11). En el punto común de la transmitancia, se generan efectos de bifurcación, los cuales son de esperarse ya que, en este punto común el vector de onda \vec{k} tiene dos direcciones posibles; esto ocurre solamente en la vecindad del punto cúspide de la transmitancia.

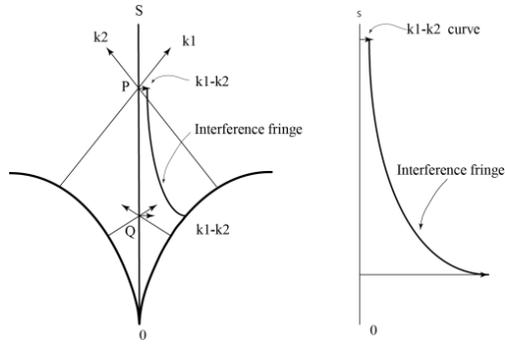


Fig. (3.9) Esquema que describe la geometría del campo difractado, generado por una transmitancia de tipo cúspide (Pearcey).

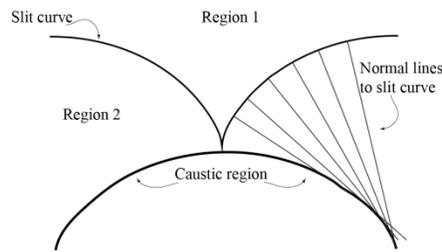


Fig. (3.10) Generación de región focal para curva tipo cúspide.

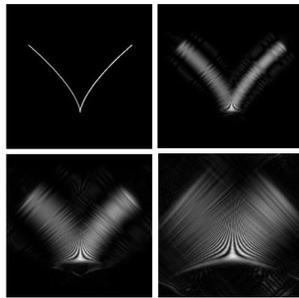


Fig. (3.11) Campo de difracción correspondiente a transmitancia de curva tipo cúspide.

Para explicar los efectos de bifurcación, usamos el hecho de que la función de irradiancia E_c (3.75) satisface la ecuación parcial diferencial no-lineal:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a^2} \frac{\partial^2 I}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial a \partial b} \right)^2 = 0, \quad (3.77)$$

Donde $a = \Delta \vec{k}_x$ y $b = \Delta \vec{k}_y$. La Ec. (3.77) es la condición para generar la curva envolvente para los puntos con el mismo valor de fase, generando una franja de interferencia. Algunas propiedades genéricas pueden deducirse, notando que el termino cuadrático es siempre positivo; consecuentemente, los términos $\frac{\partial^2 I}{\partial a^2}$ y $\frac{\partial^2 I}{\partial b^2}$ deben tener el mismo signo. Esto es, ambos son negativos o ambos son positivos. Este comportamiento tiene implicaciones importantes. En particular, la función de curvatura de las franjas de interferencia debe ser una función monótona sin puntos de inflexión. Cuando este requerimiento no es del todo satisfecho, el campo óptico genera efectos de bifurcación. Un análisis formal puede obtenerse de la estabilidad de la función de irradiancia. Resolviendo la ecuación diferencial Ec (3.77) por el método de separación de variables $I = \xi(a)\eta(b)$, generamos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\xi \frac{d^2}{da^2} = c \left(\frac{d\xi}{da} \right)^2 \quad c\eta \frac{d^2\eta}{db^2} = \left(\frac{d\eta}{db} \right)^2, \quad (3.78)$$

en donde c es una constante de acoplamiento. La estabilidad de la función de irradiancia es obtenida al linealizar el sistema de Ec (3.78). Para este propósito, utilizamos las siguientes relaciones:

$$\frac{d\xi}{da} = \sigma \xi \quad \frac{d\eta}{db} = \tau \eta \quad (3.79)$$

Donde σ y τ son constantes. El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, dado por la Ec. (3.78), adquiere la forma

$$\xi \frac{d^2}{da^2} = c_1 \xi \quad \frac{d^2\eta}{db^2} = c_2 \eta, \quad (3.80)$$

en donde las c_i son constantes y deben ser positivas con el propósito de que la interferencia tenga valores reales y positivos. Los eigen-valores del sistema Ec. (3.80) tiene dos valores reales de

signos opuestos. Como una consecuencia, el origen dado por $a = 0$ y $b = 0$ es un punto repulsor [35], lo cual explica los efectos de bifurcación en torno al punto cúspide.

3.4.2 Conclusiones.

En este análisis, se presentó la descomposición del campo difractado generado por iluminación de una transmitancia en 3-D. El estudio fue realizado utilizando las ecuaciones de Frenet-Serret, que nos permite obtener tres transmitancias que son mutuamente perpendiculares. Cada transmitancia contiene información de la curvatura y torsión de la transmitancia 3-D. La función de transmitancia sobre el plano osculante genera un campo óptico cuya amplitud es dada por una función de tipo Pearcey, con la cual se genera una caustica de tipo cúspide. Sobre el plano normal, es generada una transmitancia de tipo cubico, y el campo difractado corresponde con una función de Airy, generando una caustica doblada. Finalmente, en el plano rectificante, es generada una transmitancia caustica de tipo cúspide, y el campo de difracción es la superposición de funciones Airy generalizadas, cuya geometría se asemeja a una forma hiperbólica. Este campo óptico es rodeado por una región focal curvada generando una forma global tipo deltoide. Se hace notar que el campo de difracción completo puede ser interpretado como una superposición de tres campos ópticos, cada uno propagándose a lo largo de uno de los tres ejes ópticos mutuamente perpendiculares en un sistema de referencia tri-hedrico. Este estudio permite una vía de análisis adecuada para incorporar otras propiedades, tales como polarización. Además, este puede ser trasladado a otros campos físicos, por ejemplo, en la generación de plasmones de 1-D [36], que pueden ser obtenidos cuando la curva rendija es reemplazada por un metal, siendo la curvatura y torsión el mecanismo que permita el acoplamiento entre el campo de iluminación y el campo plasmónico.

3.5 Morfogénesis, bifurcaciones y filtración espacial sintonizable en campos ópticos.

3.5.1 Introducción.

Las propiedades físicas de los campos ópticos pueden ser obtenidas del análisis de su función de fase cuya estructura nos permite entender, predecir y eventualmente controlar efectos interesantes tales como bifurcación, vórtices y carga topológica [37-39], otra importante característica es la compresión de la función de fase que genera regiones focales[2,40] permitiendo interesantes aplicaciones [41, 42], por ejemplo, el diseño de pinzas ópticas dinámicas para atrapamiento de partículas, y la inducción de efectos de espectroscopia sintonizables [44, 45]. Desde el punto de vista teórico otras características también pueden ser predichas tales como morfogénesis y propiedades fractales [46].

En esta sección se estudia la evolución espacial de superficies ópticas generadas por difracción, mostrando que son generados efectos de bifurcación sobre regiones focales, esto implica la posibilidad de implementar procesos de filtraje espacial. El análisis es realizado usando algunos resultados de geometría diferencial vistos en las secciones anteriores, en particular el teorema de Euler [24]. El modelo teórico es corroborado experimentalmente usando como prototipo una condición de frontera tipo placa zonal. En la cual la función de curvatura es controlada por medio de una transformación línea. De esta manera, son identificadas propiedades genéricas de la superficie analizando el signo de curvatura descrito mediante el teorema de Euler, permitiéndose

con esto una clasificación de superficies ópticas. Se muestra además que las regiones focales corresponden a zonas de tipo parabólico que actúan como zonas de organización para el resto del campo óptico, separando regiones hiperbólicas de regiones elípticas, esto es corroborado experimentalmente en donde la evolución espacial del campo óptico en la región hiperbólica es descrita por medio de los cambios angulares entre las asíntotas de la región hiperbólica, en esta descripción es posible la implementación de transferencia de momento angular al propagar el campo óptico en estas condiciones, en un medio no-homogéneo en la sección transversal de propagación. Un punto relevante de este estudio consiste en que las regiones parabólicas pueden ser asociadas a la descripción de difracción de Fraunhofer.

3.5.2 Teoría.

De lo estudiado en las secciones (3.2) y (3.3) se tiene que una superficie puede ser descrita de forma bi-paramétrica mediante las coordenadas curvilíneas (u, v) , en esta representación se sabe que cada punto sobre una superficie tiene la siguiente representación

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (3.81)$$

cuando u y v son constantes respectivamente se obtiene un par de relaciones funcionales cuya representación geométrica es un sistema de curvas asociado a la variación de estos. Las derivadas parciales respecto a cada una de estas son denotadas por \vec{r}_u y \vec{r}_v , representando los vectores tangentes en cada una de las curvas mencionadas anteriormente. De este resultado se tiene que el vector normal a una superficie está dado por

$$\hat{m} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \quad (3.82)$$

Además de la sección (3.2), se ha visto que una curva tiene una representación paramétrica

$$\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)), \quad (3.83)$$

Teniendo el parámetro s como la longitud de arco de la curva, por lo cual el vector tangente asociado a la curva de la Ec. (3.83) está dado por

$$\frac{d}{ds} \vec{r}(s) = \hat{t}(s), \quad (3.84)$$

Por otro lado la información de curvatura de la curva dada por la Ec. (3.83) es obtenida por medio de la su segunda derivada

$$\frac{d^2}{ds^2} \vec{r}(s) = k(s)\hat{n}(s) = \vec{k}(s), \quad (3.85)$$

Donde \vec{k} es el vector de curvatura y es expresado de la siguiente forma

$$\vec{k} = \vec{k}_n + \vec{k}_g \quad (3.86)$$

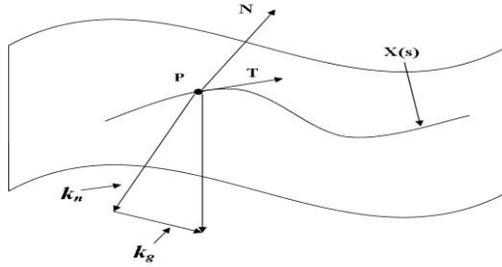


Fig. (3.12) Descripción genérica de una curva sobre una superficie cuyos puntos están dados por $\vec{r}(s)$.

En esta representación se expresa el vector de curvatura como la suma de un vector tangente a la superficie y un vector en la dirección normal a la superficie. Esta información se expresa mediante el teorema de Meusnier visto en la sección (3.3.2) y es dado por

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + dv^2} \quad (3.87)$$

Donde se han definido las funciones paramétricas que contienen información de los vectores tangentes de la coordenadas curvilíneas, estos se han visto en la sección (3.3.3) y son

$$E(u, v) = \vec{r}_u^2 \quad F(u, v) = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \quad G(u, v) = \vec{r}_v^2 \quad (3.88.a)$$

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \quad N = \vec{r}_{vv} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \quad (3.88.b)$$

Cuando el vector de curvatura \vec{k} tiene solamente componente tangencial sobre la superficie, es posible caracterizar las regiones envolventes o singulares, esta es cuando las curvas características son co-lineales y se deducirá a continuación, en esta representación la Ec. (3.87) se reduce a

$$Ldu^2 + Mdudv + Ndv^2 = 0, \quad (3.89)$$

Que puede reescribirse en la siguiente forma

$$N \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + 2M \left(\frac{dv}{du} \right) + L = 0, \quad (3.90)$$

Que corresponde a una ecuación cuadrática para la derivada dv/du , satisfaciendo

$$\frac{dv}{du} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{N}, \quad (3.91)$$

La naturaleza de la derivada dv/du , depende del signo del discriminante $M^2 - LN$, teniendo la siguiente clasificación asociada a su geometría

$$i) \quad M^2 - LN = 0 \quad \rightarrow \quad \text{region parabólica}, \quad (3.92.a)$$

$$ii) \quad M^2 - LN > 0 \quad \rightarrow \quad \text{region hiperbólica}, \quad (3.92.b)$$

$$iii) \quad M^2 - LN < 0 \quad \rightarrow \quad \text{region elíptica}, \quad (3.92.c)$$

La región óptica de tipo parabólico es generada cuando los vectores tangentes son paralelos y la superficie presenta un solo valor para la curvatura cuyo valor satisface

$$\frac{dv}{du} = -\frac{M}{N}, \quad (3.93)$$

La propiedad de que los vectores \vec{r}_u y \vec{r}_v sean paralelos puede ser aplicada para describir la evolución espacial del campo de difracción, permitiendo en particular la descripción de efectos de bifurcación. En regiones parabólicas tenemos que, de la Ec. (3.92.a) y expresando de forma explícita los coeficientes L , M y N para la función de fase $L = L(u, v)$,

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial v}\right)^2 - \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = 0, \quad (3.94)$$

Esta última ecuación nos permite calcular la integral de difracción de Fraunhofer así como determinar y analizar sus propiedades. La región parabólica es la región de organización para las regiones restantes del campo óptico, en particular para la región hiperbólica. Para este caso la forma cuadrática Ec. (3.90) presenta dos regiones limitadas por sus asíntotas, que separa las regiones con diferente signo de curvatura. En el caso elíptico no se tiene la presencia de asíntotas, ya que dv/du tiene valores complejos, el significado geométrico es que la curvatura normal no cambia de signo y en consecuencia la superficie en esta región es siempre convexa o siempre cóncava. El análisis previo es aplicado para la descripción de un conjunto de superficies ópticas, a continuación.

3.5.3 Descripción de efectos de bifurcación.

Los comentarios previos son mejor entendidos cuando los aplicamos para la descripción de un campo óptico. Una gran variedad de elementos ópticos generan regiones focales al ser iluminados, siendo prototipo lentes y placas zonales (ZP). En este análisis se considera solamente el caso de una placa zonal. En un caso ideal de un sistema libre de aberraciones, la geometría de la región focal corresponde a un conjunto de puntos llamados distribución de enfocamiento a lo largo de la dirección perpendicular a la ZP. Una función de transmitancia correspondiente a una ZP circular es

$$t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i2\pi(x^2+y^2)\frac{n}{d^2}}, \quad (3.95)$$

Cuando la ZP es iluminada con una onda plana, las coordenadas de enfocamiento corresponden con las coordenadas dadas por $x = y = 0, z = \frac{d^2}{2n\lambda}$, donde λ es la longitud de onda de la onda plana. Remarcamos que la posición de enfocamiento esta dado por el número entero n , entonces tenemos que el campo de difracción puede ser considerado como un conjunto de superficies donde cada uno genera una región focal. Un tópico muy interesante consiste en describir los cambios en la morfología de las regiones focales así como su posición cuando una transformación de escala en las coordenadas de la ZP es aplicado. Esta transformación está determinada de la forma, $x \rightarrow ax$ y $y \rightarrow by$. Tenemos que la funcion de transmitancia para la una placa zonal escalada adquiere la forma

$$t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i2\pi(a^2x^2+b^2y^2)\frac{n}{d^2}}, \quad (3.96)$$

Sin pérdida de generalidad se puede considerar que $a > b$, siendo a y b reales. El campo de difracción esta dado por

$$\phi(x_0, y_0, z, n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \iint e^{i2\pi(a^2x^2+b^2y^2)\frac{n}{d^2}} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(xx_0+yy_0)} dx dy, \quad (3.97)$$

Identificando la función de fase como

$$L(x_0, y_0, z) = \left(2\frac{a^2n}{d^2} + \frac{1}{\lambda z}\right)x^2 + \left(2\frac{b^2n}{d^2} + \frac{1}{\lambda z}\right)y^2 - x\frac{x_0}{\lambda z} + y\frac{y_0}{\lambda z}, \quad (3.98)$$

Donde algunos términos comunes han sido omitidos. La función de fase describe una superficie óptica $b = b(a, x, y)$, donde x y y son parámetros sobre la condición de frontera. Hacemos énfasis de que la funcion de fase depende del entero n , generando un conjunto de RF. La geometría de la RF puede obtenerse de la Ec. (3.98) el tipo de geometría se obtiene analizando el signo del determinante de la forma cuadrática

$$\Delta(z) = \left(2\frac{a^2n}{d^2} + \frac{1}{\lambda z}\right) \left(2\frac{b^2n}{d^2} + \frac{1}{\lambda z}\right), \quad (3.99)$$

Cuando este tiene signo negativo, la geometría es de tipo hiperbólica, siendo las asíntotas definidas por los términos dentro de los paréntesis, cuando el determinante es positivo la geometría correspondiente es una elipse, para el caso parabólico el determinante es cero, en este caso son determinadas las coordenadas z para cada valor de n , cumpliendo las condiciones siguientes

$$2\frac{a^2n}{d^2} + \frac{1}{\lambda z} = 0 \quad 2\frac{ab^2n}{d^2} + \frac{1}{\lambda z} = 0 \quad (3.40)$$

Analizando los primeros términos se tiene que la focalización ocurre cuando

$$z(n, a) = -\frac{d^2}{2a^2n\lambda}. \quad (3.41)$$

Cuando $a < 0$, los valores positivos corresponden a focalización virtual. Usando estos resultados, en la integral de difracción de la Ec. (3.97) es fácil mostrar que la región focal tiene una forma lineal a lo largo de la coordenada y . Analizando ahora, como es la evolución espacial de la región focal en la vecindad de la coordenada $z(n, a)$. Se considera un desplazamiento infinitesimal $z(n, a) \pm \epsilon$

$$z(n, a) - z' = -\frac{d^2}{2a^2n\lambda} - z' = \epsilon. \quad (3.42)$$

Cuando $\epsilon > 0$ se tiene que z' es menor que $z(n, a)$ y corresponde con la región de tipo elíptica. Analizando la forma cuadrática dada por la Ec. (3.98) y considerando el caso cuando $\epsilon < 0$, la geometría de la superficie óptica es un conjunto de hipérbolas cuyas asíntotas están dadas por

$$y = \pm \frac{\sqrt{2\frac{a^2n}{d^2} + \frac{1}{\lambda z}}}{\sqrt{2\frac{b^2n}{d^2} + \frac{1}{\lambda z}}}, \quad (3.43)$$

Donde z satisface $z(n, a) < z < z(n, b)$. El análisis previo permite una interpretación para la generación de las RF, estas son generadas cuando las asíntotas son paralelas como es

esquemático en la Fig. (3.13). Este comportamiento conduce a explicar con bases geométricas la transición entre zonas hiperbólicas a parabólicas

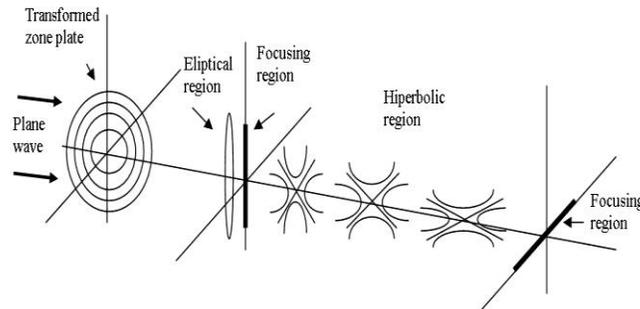


Fig. (3.13) Descripción geométrica del campo de difracción siguiendo una secuencia parabólica-hiperbólica-parabólica.

Para corroborar los resultados del análisis previo se ha diseñado un montaje experimental en el cual se ilumina una ZP transformada y los resultados experimentales son presentados en la siguiente figura

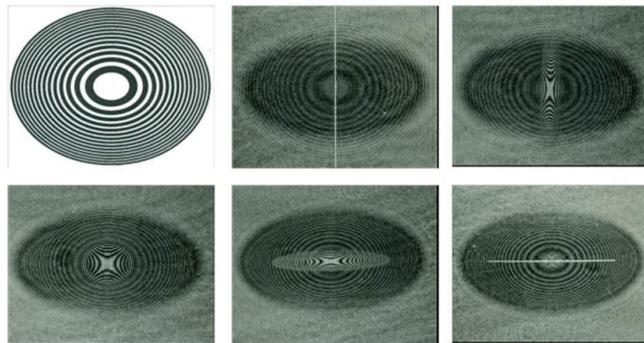


Fig. (3.14) Resultados experimentales, se muestra placa zonal transformada, y el correspondiente campo de difracción en secuencia de región parabólica-hiperbólica-parabólica, ambas regiones corresponden a la bifurcación de un punto focal.

En el caso de una ZP circular la geometría de las RF corresponden con puntos distribuidos a lo largo del eje z, en el caso de la ZP transformada, cada RF es dividida en dos regiones focales con forma lineal, lo cual corresponde con efectos de bifurcación y morfogénesis. Hacemos notar que la generación de regiones focales ocurre cuando las asíntotas de la región hiperbólica son paralelas, esto ocurre a lo largo del eje y y del eje x respectivamente.

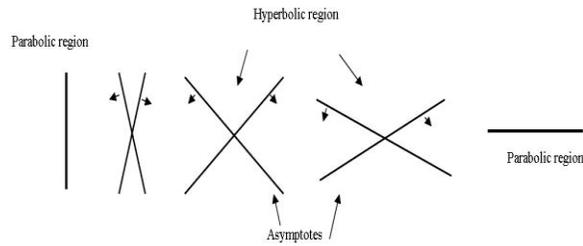


Fig. (3.15) Evolución correspondiente a la región hiperbólica descrita por los cambios angulares de sus asíntotas.

De la interpretación geométrica anterior podemos predecir procesos de transferencia de momento angular, lo cual implica una evolución no simétrica de las asíntotas. Esto puede generarse al propagar un campo en un medio de índice de refracción variable generando vórtices ópticos.

3.5.4 Conclusiones.

Analizamos la geometría de superficies ópticas usando el teorema de Euler de geometría diferencial, mediante este se describió la función de curvatura de las superficies ópticas. Este punto de vista permite clasificar la geometría de las superficies en elíptica, hiperbólica y parabólica. Esta última región tiene propiedades interesantes ya que esta corresponde con la región de difracción de Fraunhofer como puede ser fácilmente deducido de la integral de difracción al ser nulos los términos cuadráticos. Para el arreglo experimental utilizamos como prototipo una placa zonal, mostrando que al aplicar una transformación lineal en la condición de frontera se obtienen nuevos efectos interesantes. Uno de estos consiste en la generación de procesos de morfogénesis. Otro efecto interesante consiste en la generación de bifurcaciones en la región de Fraunhofer, esta es caracterizada por la división de la región focal, es decir, este consiste en el desdoblamiento de cada punto focal en múltiples regiones focales, esta propiedad nos permite implementar procesos de filtraje espacial sintonizable. La evolución y transición de las regiones hiperbólicas fueron analizadas describiendo la evolución angular de sus asíntotas. Las regiones parabólicas ocurren

cuando estas asíntotas son paralelas, el comportamiento de la evolución de las asíntotas permite la generación de transferencia de momento angular y con esto la generación de vórtices. Estas propiedades pueden realizarse rompiendo la simetría en los cambios angulares de las asíntotas que puede ser implementado al propagar un campo en un medio con índice de refracción dinámico.

CAPITULO 4.

4.1 Procesos de onda-difusión en campos ópticos y efecto de auto-refracción.

4.1.1 Introducción.

Los modelos tradicionales de óptica son desarrollados resolviendo la ecuación de onda o de forma equivalente la ecuación de Helmholtz [47], para tener una comprensión más profunda acerca de estos comportamientos físicos, incorporamos efectos de difusión complementando el modelo teórico para el análisis del campo óptico. Los siguientes comentarios se plantean a modo de justificar la necesidad de incluir comportamientos de difusión usando como prototipo procesos de entropía, estos consisten en la presencia discontinuidades o de saltos de amplitud en el campo óptico [9]. Cuando estas discontinuidades ocurren sobre la condición de frontera, la fuente luminosa es modificada virtualmente correspondiendo con la generación de carga topológica. La carga topológica adquiere un sentido dinámico cuando el campo óptico es propagado en un medio con un índice de refracción dependiente del tiempo lo cual se manifiesta en la generación de corrientes topológicas, consecuentemente podemos asociar al medio una conductividad topológica, este efecto también ocurre en la vecindad de las regiones focales [48]. Con el propósito de obtener una descripción extendida sobre las propiedades del campo óptico, es necesario considerar un término portador de información de la conductividad topológica del medio, esto significa que los procesos de difusión deben estar incluidos modificando el número de onda de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell [49].

Los comentarios previos son reforzados con un manuscrito previo que hemos reportado con evidencia experimental de la generación de procesos de difusión cuando luz incoherente es propagada en un medio con índice de refracción aleatorio [16]. El objetivo de este estudio consiste en analizar la ecuación diferencial parcial de onda-difusión identificando las regiones ópticas donde los procesos de difusión son dominantes [50-52], mostramos además que, en estas regiones la función de fase satisface la ecuación de Poisson y el comportamiento ondulatorio es prácticamente nulo, consecuentemente el índice de refracción efectivo adquiere valores cercanos a cero. Las propiedades topológicas del campo óptico implican una relación de balance entre los procesos de onda y difusión lo cual es caracterizado mediante una relación de dispersión. Este análisis nos permite identificar propiedades importantes, tales como un comportamiento auto-regulado del campo óptico el cual puede ser usado para explicar el origen de propiedades físicas de haces acelerados y la capacidad de transferencia de momento angular óptico [53, 54]. En particular se muestra que cuando el índice de refracción efectivo tiende a cero, el campo óptico es doblado hacia las regiones focales, llamamos a este efecto “auto-refracción” y es corroborado experimentalmente utilizando un sistema tipo Mach-Zendher.

4.1.2 Función de relación de dispersión para efectos de onda-difusión.

El punto de partida de nuestro estudio consiste en la descripción del campo óptico desde la ecuación diferencial de onda-difusión cuya representación matemática está dada por

$$\vec{\nabla}^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + b \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (4.1)$$

De donde v es la velocidad de la onda y b corresponde al parámetro de difusión. Esta ecuación esta en correspondencia con las ecuaciones de Maxwell. Haciendo un análisis armónico [4] proponiendo una solución de la forma

$$\psi = \phi(\vec{r}) \exp(-i\omega t), \quad (4.2)$$

Obtenemos

$$\vec{\nabla}^2 \phi + \sigma^2 \phi = 0, \quad (4.3)$$

en donde $\sigma^2 = K^2 + i\omega b$. La Ec. (4.3) es similar a la ecuación de Helmholtz, sin embargo, el valor complejo del número de onda σ tiene implicaciones físicas importantes, las cuales se analizan en seguida. La función de amplitud para el campo óptico está formada por la suma de efectos de onda y difusión, cuya representación usando la solución de Green es

$$\phi(P) = \phi_w(P) + \phi_d(P) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\exp\{i\sigma r\}}{r} \left(\left(i\sigma - \frac{1}{r} \right) \phi_S \hat{r} - \vec{\nabla} \phi_S \right) \cdot \hat{n} ds \quad (4.4)$$

En donde el subíndice se refiere a efectos de onda y difusión respectivamente. El número de onda complejo σ esta dado por

$$\sigma = \xi + i\eta = (K^2 + i\omega b)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.5)$$

Cada termino satisface la ecuación

$$\xi = \left[\frac{K^2}{2} + \frac{1}{2} (K^2 + b^2 \omega^2)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad \eta = \left[-\frac{K^2}{2} + \frac{1}{2} (K^2 + b^2 \omega^2)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (4.6)$$

De las Ecs. (4.6), obtenemos la función de relación de dispersión dada por

$$\xi^2 - \eta^2 = K^2, \quad (4.7)$$

Cuya grafica corresponde a una curva con geometría hiperbólica la cual se muestra en la Fig. (4.1), el significado físico puede ser identificado por el comportamiento asintótico. La relación de dispersión analizada contiene información del balance en la evolución entre los efectos de onda y difusión.

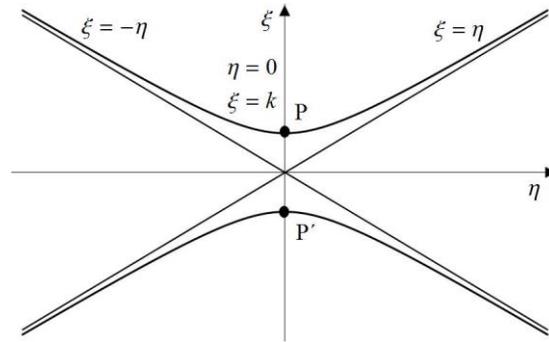


Fig. (4.1). Función de relación de dispersión para procesos ópticos de onda-difusión.

Cuando $\eta = 0$, correspondiendo a los puntos P, P', usando la Ec. (4.6), deducimos que $b = 0$, $\xi = K$, los cual significa que no hay presencia de efectos de difusión, entonces la ecuación diferencial correspondiente a la amplitud toma la forma usual de la ecuación de Helmholtz

$$\vec{\nabla}^2 \phi_w + K^2 \phi_w = 0, \quad (4.8)$$

en donde $K = K_0 n$, n es el índice de refracción efectivo y K_0 es el número de onda en el vacío.

Otro comportamiento interesante ocurre cuando ξ tiende asintóticamente a η . De la función de relación de dispersión se tiene que $K \rightarrow 0$, lo cual es posible solo si el índice de refracción efectivo tiende a cero $n \rightarrow 0$ y la ecuación para la función de amplitud toma la forma

$$\vec{\nabla}^2 \phi_d + i\omega b \phi_d = 0, \quad (4.9)$$

Cuya solución Green es

$$\phi_d(P) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\exp\{i\eta r\} \exp\{-\eta r\}}{r} \left(\left(i\eta - \eta - \frac{1}{r} \right) \phi_S \hat{r} - \vec{\nabla} \phi_S \right) \cdot \hat{n} ds, \quad (4.10)$$

en donde $\eta = \sqrt{bw/2}$. Hacemos notar que Ec. (4.10) representa la función de amplitud solo para procesos de difusión, el comportamiento ondulatorio no está presente o es casi nulo.

Debe notarse también que la relación de dispersión implica que los efectos de onda-difusión deben co-existir simultáneamente en un campo en donde el índice de refracción efectivo toma valores en el intervalo $0 < n \leq 1$.

Las regiones en donde el comportamiento ondulatorio se pierde, son obtenidas de las soluciones Green cuando $K \rightarrow 0$, teniendo la forma

$$\begin{aligned} \phi_w(P) = 0 &= \lim_{K \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\exp\{iKr\}}{r} \left(\left(iK - \frac{1}{r} \right) \phi_S \hat{r} - \vec{\nabla} \phi_S \right) \cdot \hat{n} ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{r} \left(\left(-\frac{1}{r} \right) \phi_S \hat{r} - \vec{\nabla} \phi_S \right) \cdot \hat{n} ds, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Esto conduce a

$$\vec{\nabla} \phi_S = -\frac{\phi_S}{r} \hat{r}. \quad (4.12)$$

Ec. (4.12) es la definición de región focal [1, 48], se hace notar que en esta región $n \approx 0$. y no hay efectos ondulatorios presentes, solamente los efectos de difusión.

4.1.3 Descripción tipo partícula en procesos ópticos de onda-difusión extremales.

Para desarrollar un análisis de efectos de onda-difusión, es conveniente describir la generación de regiones focales como sigue. La condición de frontera definida por el frente de onda emergente de

un conjunto de trayectorias normales, esta evolución genera una curva donde su geometría corresponde con la envolvente de los centros de curvatura de la condición de frontera [48], esto está de acuerdo con la Ec. (4.12). De esta construcción, es evidente que las densidad de rayos se incrementa en la vecindad de las regiones focales, mostrado en la región sombreada en la Fig. (4.2), justificando el comportamiento difusivo del campo óptico.

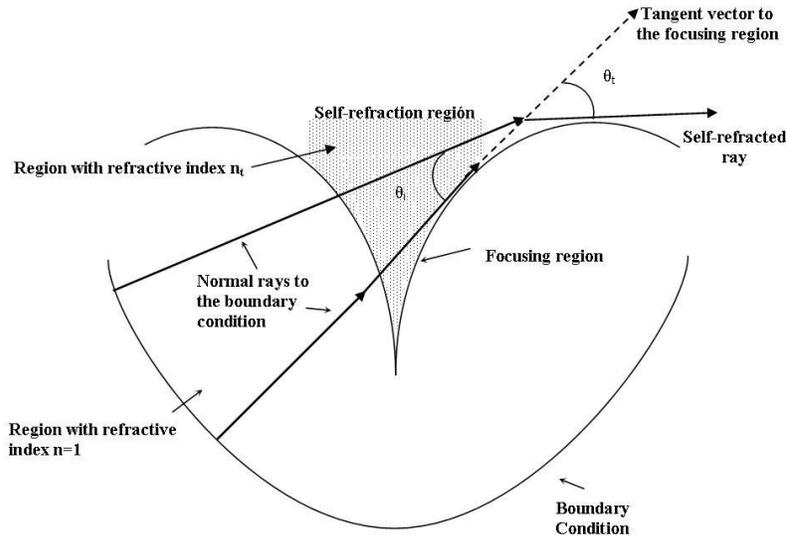


Fig. (4.2) Descripción geométrica de la RF y los parámetros relacionados para explicar el efecto de auto-refracción.

Cada trayectoria normal debe tener propiedades extremales implícitas en la solución para la Ec. (4.3) estas son dadas por

$$\phi = A \exp(iK_0 L), \quad (4.13)$$

donde A es una constante y L es la función de fase, este análisis es complementario a las soluciones de Green descritas en la sección anterior. Sustituyendo Ec. (4.13) en la Ec. (4.3) y separando la parte real de la parte compleja, obtenemos

$$|\vec{\nabla} L|^2 = \frac{K^2}{K_0^2} = n^2, \quad (4.14.a)$$

$$\vec{\nabla}^2 L = -\frac{\omega b}{K_0}. \quad (4.14.b)$$

Ec. (4.14.b) implica que los efectos de difusión generan, en el campo óptico, propiedades de tipo-partícula similares a las de una carga eléctrica, esto es porque tiene la misma representación matemática dada por la ecuación de Poisson. En la Ec. (4.14.b), se describe una estructura de la que corresponde con el modelo clásico del campo óptico, de la relación de dispersión cuando $\xi \rightarrow \eta$, el número de onda tiende a cero implicando que el índice de refracción efectivo toma valores cercanos a cero $n \rightarrow 0$ y el comportamiento ondulatorio en el campo óptico es prácticamente nulo. Como conclusión, hemos mostrado que en regiones donde los efectos de difusión son dominantes el valor del índice de refracción varía en el intervalo $(0,1]$, i.e., la presencia de efectos de difusión minimiza el valor en el índice de refracción efectivo y el campo óptico presenta propiedades tipo-partícula. En la siguiente sección describimos una consecuencia de este hecho y es corroborado experimentalmente. Esto está en buen acuerdo con el concepto de fase adiabática [2].

4.1.4 Descripción del efecto de auto-refracción y su determinación experimental.

Partiendo de la posibilidad de que el índice de refracción efectivo puede adquirir valores en el rango $(0,1]$, implica la generación de nuevas propiedades físicas, una de ellas consiste en que el campo óptico es doblado hacia las regiones focales donde el valor de índice de refracción es mínimo, esto ocurre en las regiones focales, nombramos a este comportamiento como “efecto de auto-refracción” esto es explicado utilizando una representación geométrica más adelante. Los cambios en el índice de refracción efectivo pueden ser descritos usando la ley de Snell donde los parámetros involucrados son esquematizados en la Fig. (4.2). Debe ser notado que los ángulos son medidos respecto a la trayectoria normal en cada punto de la condición de frontera la cual corresponde con

la dirección del vector tangente sobre la región focal. Este vector separa dos medios con diferente índice de refracción efectivo. Los rayos que se propagan antes de llegar a la región focal son propagados con un índice de refracción efectivo $n_i = 1$. Cuando estos rayos cruzan la región focal, este interactúa a lo largo de su recorrido y es equivalente a la propagación del campo en un medio con índice de refracción efectivo $n_T < n_i$. Debe ser notado que en la vecindad de la región focal la densidad de rayos se incrementa lo cual es equivalente a condicionar el campo óptico a procesos de compresión, siendo máximos estos procesos junto con la densidad de rayos sobre la región focal, implicando efectos de difusión dominantes. De la ley de Snell tenemos que $\sin \theta_T > \sin \theta_i$ ya que $n_T < 1$. El valor límite del ángulo θ_T ocurre cuando $n_T \rightarrow 0$, esto implica que θ_T adquiere valores complejos, interpretamos este hecho como un comportamiento de las regiones focales tipo sumideros, que corresponden con los efectos de auto-refracción, este efecto está de acuerdo con la descripción dada usando la ecuación de Poisson Ec. (4.14.b). Para corroborar estos efectos, realizamos un experimento que consiste en describir los efectos de interferencia entre una onda plana con el campo óptico emergiendo de una condición de frontera dada por una rendija curvada de forma parabólica que está asociada con las regiones tipo cúspide, el montaje interferómetro es esquematizado en Fig. (4.3).

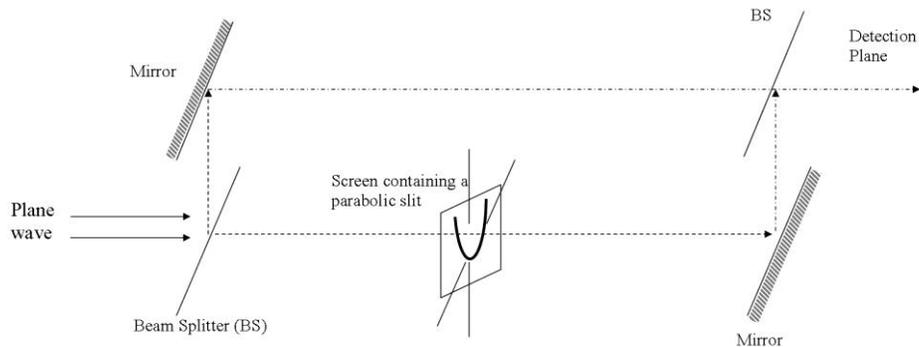


Fig. (4.3) Arreglo experimental que consiste en un sistema interferómetro para describir la interferencia entre una onda plana y el campo de difracción emergente de una rendija de forma parabólica.

En Fig. (4.4.a), mostramos que el campo difractado correspondiente a la condición de frontera caracterizada por una rendija de forma parabólica y en la Fig. (4.4.b) mostramos las franjas de interferencia resultantes del campo difractado y la onda plana, debe notarse que los efectos de interferencia no ocurren sobre la región focal, siendo esta última invariante. En las regiones inferiores de la región focal, los efectos de interferencia son dominantes respecto a la región superior y es fácil entender este efecto tomando en cuenta que los rayos en esta región deben curvarse hacia la región focal, siendo esto consistente con los efectos de auto-refracción como es explicado en la siguiente sección [5].

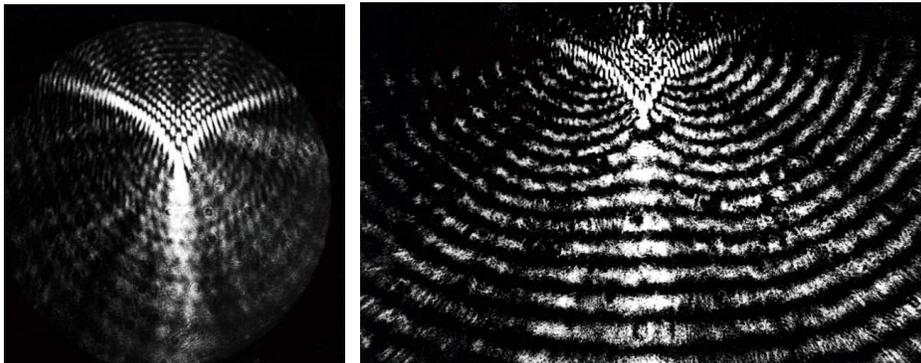


Fig. (4.4) a) Síntesis experimental de campo tipo Pearcey. b) Resultados experimentales para la interferencia entre campo tipo Pearcey y una onda plana. La evolución espacial de las franjas de interferencia es explicada satisfactoriamente usando el efecto de auto-refracción. Las franjas de interferencia son limitadas por la región focal, la cual se mantiene invariante.

4.1.5 Conclusiones.

Como conclusiones tenemos que los mecanismos de transporte conocidos en un sistema físico están dados por los procesos de onda y difusión. Para el presente análisis, el concepto de estructura topológica consiste en analizar el comportamiento simultáneo de onda-difusión en un campo óptico así como su relación de balance. Esto fue obtenido resolviendo la ecuación diferencial parcial de onda-difusión del campo óptico y su relación de balance dada por la función de relación de dispersión. Una consecuencia importante que se puede identificar es que existen regiones del campo

óptico en donde las propiedades ondulatorias son prácticamente nulas, siendo dominantes los efectos de difusión, apareciendo comportamientos interesantes en el campo óptico. Por ejemplo si se considera que el comportamiento ondulatorio del campo se pierde entonces el campo óptico es inmune a efectos de interferencia como puede ser deducido de la invariancia morfológica de las regiones focales mostrada en resultados experimentales. Con el propósito de identificar regiones en donde el comportamiento ondulatorio se pierde o es casi nulo, realizamos un análisis extremal mostrando que la función de fase satisface la ecuación de Poisson donde los parámetros de difusión son los responsables de la generación de propiedades de tipo-partícula en el campo óptico. Otro resultado importante que se considera es que los efectos de difusión generan un medio con índice de refracción efectivo cercano a cero $n \rightarrow 0$. Con este hecho es posible la generación de fenómenos de auto-refracción los cuales consisten en el doblamiento del campo hacia las regiones focales lo cual justifica las propiedades implícitas de carga presentes en la ecuación de Poisson. Los resultados experimentales mostrados están de buen acuerdo con el modelo teórico desarrollado en este trabajo presentado. Finalmente, el análisis realizado puede tener aplicaciones para estudiar efectos importantes tales como las propiedades físicas de haces acelerados y su relación con la transferencia de momento angular.

4.1.6 Base interferométrica del efecto de auto-refracción.

En esta sección se justifica el efecto de auto-refracción con una base interferométrica. Comenzamos por describir la superposición coherente de dos ondas planas dadas por

$$\phi(r) = A \exp(ik_1 \cdot r) + B \exp(ik_2 \cdot r) \quad (4.15)$$

Ya que la amplitud resultante representa una onda, esta debe tener una representación polar de la forma

$$\phi(r) = A \exp(ik_1 \cdot r) + B \exp(ik_2 \cdot r) = C \exp(i\delta(r, k_1, k_2)), \quad (4.16)$$

Donde se cumple que

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(k_1 - k_2) \cdot r} \quad (4.17)$$

Y además la siguiente relación

$$\delta(r, k_1, k_2) = \tan^{-1} \left(\frac{A\sin k_1 \cdot r + B\sin k_2 \cdot r}{A\cos k_1 \cdot r + B\cos k_2 \cdot r} \right) \quad (4.18)$$

De la Ec. (4.17) es fácil deducir que el modulo cuadrado de la amplitud C representa la formula general de interferencia, la diferencia de fase es responsable de la distribución de irradiancia y el termino $\delta(r, k_1, k_2) = \tan^{-1} \left(\frac{A\sin k_1 \cdot r + B\sin k_2 \cdot r}{A\cos k_1 \cdot r + B\cos k_2 \cdot r} \right)$ representa la fase de la onda resultante. El caso más simple ocurre cuando la amplitud de las ondas involucradas es la misma, para este caso, la representación polar de la amplitud toma la

$$\phi(r) = A\sqrt{2 + 2\cos(k_1 - k_2) \cdot r} \exp \left[i\frac{1}{2}((k_1 + k_2) \cdot r) \right] \quad (4.19)$$

La ecuación anterior puede ser generalizada para explicar los efectos de auto-refracción como es esquematizado en la Fig. (4.5), aplicado al conjunto de n-vectores emergiendo de una condición de frontera dada por una rendija curvada.

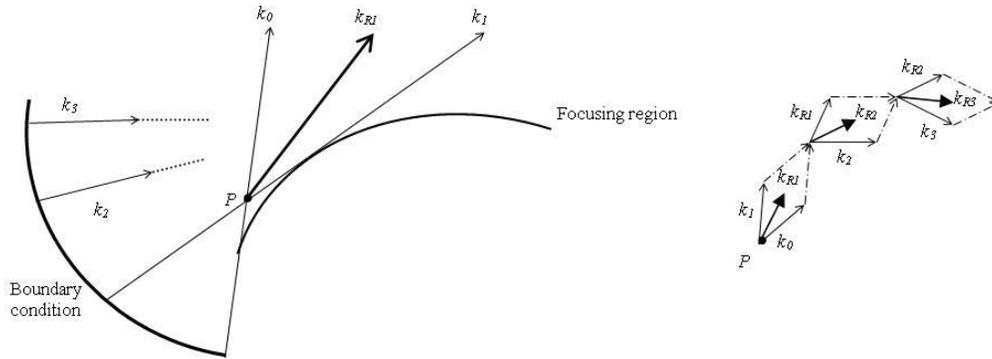


Fig. (4.5) Descripción de la resultante del vector k para un conjunto de K vectores emergiendo de una condición de frontera.

La primera suma vectorial para k_0 y k_1 genera un vector resultante k_{R1} , que interactúa con el vector k_2 generando el vector k_{R2} . Este proceso es aplicado consecutivamente a los siguientes vectores, debe ser claro que el vector resultante es tangente a la región focal justificando el efecto de auto-

refracción. Finalmente hacemos notar que la expresión para el índice de refracción efectivo puede ser obtenido tomando el modulo cuadrado del gradiente de la Ec. (4.18).

4.2 Propiedades topológicas de la interacción entre regiones focales tipo cúspide.

4.2.1 Introducción.

Es bien conocido que la energía es disipada o reorganizada en torno a puntos de equilibrio, también conocidos como puntos críticos, lo cual constituye el soporte de la realización de los modelos de la física contemporánea [22]. En un contexto óptico esto significa que el campo óptico es organizado en torno a regiones focales también conocidas como causticas o regiones singulares, definidas como la envolvente de puntos críticos de la función de amplitud [1, 26, 55]. En este sentido, las propiedades físicas de las regiones focales son fundamentales para entender la estructura global del campo óptico ya que en la vecindad de estas, se espera que sean observados comportamientos interesantes del campo óptico. Por ejemplo, efectos de bifurcación [3, 29], consistiendo en la generación de diferentes propiedades físicas cuando algunos parámetros implícitos en la descripción del campo óptico cambian su valor. La consecuencia física de esto es que el campo óptico es dividido en dos ramas cuya evolución espacial-temporal pueden generar vórtices ópticos [15, 56]. En adición, las regiones focales presentan comportamientos similares a la de carga topológica, los cuales son evidentes cuando este interactúa con otro campo óptico [39, 57].

El propósito principal de este análisis está soportado por la propiedad de que la función de fase del campo óptico presenta propiedades adiabáticas en la vecindad de una región focal. El significado físico es que el campo óptico pierde su comportamiento de onda adquiriendo propiedades de tipo partícula [16], además las regiones focales presentan niveles altos de irradiancia, ofreciendo la posibilidad de transferir energía a otras regiones del campo óptico, este hecho es descrito en detalle implementando la ecuación de transporte de irradiancia. En este contexto, el objetivo de este análisis es describir la interacción entre dos regiones de tipo Pearcey donde cada una tiene asociada una condición de frontera curva [58]. Las condiciones de frontera para generar las regiones de tipo Pearcey consisten en dos rendijas con geometría de parábola. Esta configuración puede ser interpretada como una versión del interferómetro de Young.

4.2.2 Interacción de irradiancia entre dos regiones focales.

Del comportamiento adiabático de las regiones focales, la interacción entre estas debe ser descrita implementando primero una redistribución de energía, donde nuevas propiedades físicas son identificadas, en particular se muestra que cada región focal es capaz de transferir energía a otras regiones del campo óptico, esta es una nueva propiedad que aparece en el interferómetro topológico de Young.

La interacción es descrita utilizando la ecuación de transporte de irradiancia [59], esta es aplicada en la vecindad de los puntos cúspide generando un canal de irradiancia el cual constituye una extensión de las regiones focales como se muestra a continuación. Las regiones del campo óptico restantes, deben ser analizadas por medio de una interacción de amplitud donde las franjas de interferencia son organizadas en torno al canal de irradiancia. La ecuación de transporte de irradiancia está dada por

$$\vec{\nabla}_{\perp} \cdot \left(I(x, y, z) \vec{\nabla}_{\perp} L(x, y, z) \right) + \frac{\partial}{\partial z} I(x, y, z) = 0, \quad (4.20)$$

Donde $\vec{\nabla}_{\perp}$ es el operador gradiente transversal actuando en el plano (x, y) . La irradiancia sobre un punto $P(x, y, z)$ es generado por la contribución de cada región focal representada por $I(x, y, z) = I_1 + I_2$, el término de fase está dado por $L = L_1 - L_2$, donde $L_{1,2} = kr_{1,2}$, k es el número de onda y $r_{1,2}$ es la distancia desde un punto en la condición de frontera al punto de detección P. Solamente los parámetros asociados a la parábola superior son esquematizados.

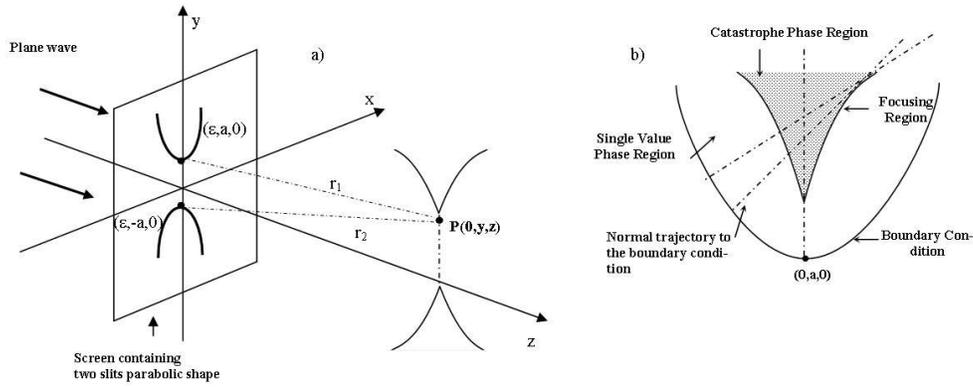


Fig. (4.6) a) Interferómetro topológico de Young y regiones focales de forma cúspide, cada una asociada a una función de Pearcey. La condición de frontera está contenida en un cuadrado de 8mm y la separación de sus vértices de 0.2 mm. La longitud de onda utilizada es de 632.8 nm. B) Descripción geométrica de la región focal.

Considerando las coordenadas $(\epsilon, \pm a, 0)$ para los puntos sobre la condición de frontera en la vecindad de los vértices de la parábola y un punto arbitrario $(0, y, z)$ en trayectoria lineal que conecta los puntos cúspide es

$$r_1 = \sqrt{(y - a)^2 + z^2 + \epsilon^2} = z + \frac{(y-a)^2}{2z}, \quad (4.21.a)$$

$$r_2 = \sqrt{(y + a)^2 + z^2 + \epsilon^2} = z + \frac{(y+a)^2}{2z}, \quad (4.21.b)$$

Donde se han despreciado términos cuadráticos ϵ^2 ya que $|\epsilon| < 1$ El término de diferencia de fase toma la forma

$$kr_1 - kr_2 = \frac{2ayk}{z}. \quad (4.22)$$

Entonces la ecuación de transporte de irradiancia adquiere la forma

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\{I_1 + I_2\} \frac{\partial}{\partial y} (kr_1 - kr_2) \right] = -\frac{\partial(I_1 - I_2)}{\partial z}, \quad (4.23)$$

Utilizando la Ec. (4.22) en la Ec. (4.23), la ecuación diferencial parcial para la interacción de irradiancia es

$$\frac{-2ak}{z} \frac{\partial}{\partial y} (I_1 + I_2) = \frac{\partial(I_1 + I_2)}{\partial z}, \quad (4.24)$$

Y la correspondiente ecuación de características es

$$\frac{dy}{2ak} = \frac{dz}{z} \quad d(I_1 + I_2) = 0, \quad (4.25)$$

Cuya solución está dada por

$$I_1 + I_2 = c_2, \quad \frac{y}{2ak} = \ln(z) + c_1. \quad (4.26)$$

Nótese que $z \neq 0$, ya que $z = 0$ corresponde a una transmitancia sin curvatura, en este caso no se logran generar regiones focales. El significado físico de la Ec. (4.26) es la generación de un canal de irradiancia que conecta los dos puntos cúspide. Hacemos notar que la Ec. (4.26) es válida en la vecindad de los puntos cúspide y la geometría del canal de irradiancia no depende de la separación relativa entre las rendijas parabólicas. Esto está en acuerdo con simulaciones computacionales para las cuales el canal de irradiancia es mostrado en la Fig. (4.6). Estos mismos tienen buena correspondencia con los resultados experimentales mostrados en la Fig. (4.7). Cuando la separación entre las regiones cúspide es suficientemente grande, no existe interacción de irradiancia y la geometría de las franjas de interferencia corresponden con la descripción clásica del interferómetro de Young, como es mostrado en los resultados experimentales mostrados en la Fig. (4.7).

4.2.3 Interacción de amplitud.

El siguiente paso del estudio es la descripción de la interacción de amplitud entre los campos ópticos de tipo Pearcey. Considerando las dos rendijas parabólicas como un interferómetro topológico, el problema consiste en la descripción de la estructura de las franjas de interferencia así como su relación con las regiones focales. Los campos ópticos bajo estudio son generados por la difracción emergiendo desde cada rendija cuya función de transmitancia está dada por

$$t(x, y) = \delta(y - (x^2 + a)) + \delta(y + (x^2 + a)), \quad (4.27)$$

siendo δ la función delta de Dirac. El campo difractado para la función de amplitud en la aproximación paraxial es

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, y_0, z) = & \iint_{-\infty}^{\infty} [\delta(y - (x^2 + a)) + \delta(y + (x^2 + a))] \\ & \times \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda z}(xx_0 + yy_0)\right] dx dy. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Haciendo una integración respecto de la variable y , se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, y_0, z) = & \int \exp\frac{4i\pi}{\lambda z}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\left(y_0 - a - \frac{1}{2}\right) - xx_0\right) dx \\ & + \int \exp\frac{4i\pi}{\lambda z}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\left(y_0 + a - \frac{1}{2}\right) - xx_0\right) dx, \end{aligned} \quad (4.29)$$

El término de fase en la primera integral es de la forma

$$L(x, \alpha, \beta) = \frac{x^4}{4} - \alpha \frac{x^2}{2} + \beta x. \quad (4.30)$$

La estructura de la función de fase puede obtenerse desde sus puntos críticos dados por

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = x^3 - \alpha x + \beta, \quad (4.31)$$

Donde la envolvente de los puntos críticos satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 = 3x^2 - \alpha. \quad (4.32)$$

Ya que los puntos críticos toman valores reales, es necesario que $\alpha > 0$, lo cual ocurre cuando

$$y_0 - a - \frac{1}{2} > 0. \quad (4.33)$$

De las Ecs. (4.31 y (4.32), la geometría de la región focal es entonces

$$\beta = \pm \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4.34)$$

La consecuencia importante de la Ec. (4.34) es que la función de fase puede ser considerada como una función de catástrofe. Si esta condición no es del todo satisfecha el término de fase no corresponderá a una función de catástrofe ya que no están presentes puntos singulares, esta puede ser representada por una función cuadrática, esto ocurre cuando

$$y_0 \leq a + \frac{1}{2}, \quad (4.35)$$

Y no está presente envolvente de puntos singulares. En este caso, el termino cuadrático puede ser removido y la integral es reducida a

$$\int \exp \frac{2i\pi}{\lambda z} \left(x^2 \left(y_0 - a - \frac{1}{2} \right) \right) \exp \left(\frac{2i\pi}{\lambda z} x x_0 \right) dx. \quad (4.36)$$

La última expresión corresponde a la transformada de Fourier de una función Gaussiana con varianza compleja. Calculando explícitamente la integral obtenemos

$$\varphi_1 = \exp \frac{2i\pi}{\lambda z} \left[\frac{x_0^2}{\left(y_0 - a - \frac{1}{2} \right)^2} \right]. \quad (4.37)$$

De los análisis previos, se concluye parcialmente que la función de amplitud φ_1 tiene dos posibles representaciones para su función de fase. Una de estas corresponde a una región de catástrofe, la otra es una función cuadrática, separadas ambas por la región focal. Para cada representación se esperan diferentes propiedades físicas del campo óptico.

De un análisis similar para la segunda integral en la Ec. (4.29), la condición para la cual el término de fase toma la forma de una función de catástrofe es

$$y_0 < -a - \frac{1}{2}. \quad (4.38)$$

Si la condición previa no es satisfecha, el término de fase es representado por una función cuadrática y la amplitud está dada por

$$\varphi_2 = \exp \frac{2i\pi}{\lambda z} \left[\frac{x_0^2}{\left(y_0 + a - \frac{1}{2}\right)^2} \right], \quad (4.39)$$

La cual es definida en regiones con la condición

$$y_0 \geq -a - \frac{1}{2}, \quad (4.40)$$

De las Ecs. (4.37) y (4.39), es fácil mostrar que los términos de interferencia son entonces

$$2\text{Re}\varphi_1\varphi_2^* = 2\cos \left[\frac{2i\pi}{\lambda z} \left(\frac{x_0^2}{\left(y_0 - a - \frac{1}{2}\right)^2} \right) - \frac{2i\pi}{\lambda z} \left(\frac{x_0^2}{\left(y_0 + a + \frac{1}{2}\right)^2} \right) \right], \quad (4.41)$$

Donde el máximo de irradiancia ocurre cuando

$$\left(\frac{x_0^2}{\left(y_0 - a - \frac{1}{2}\right)^2} \right) - \left(\frac{x_0^2}{\left(y_0 + a + \frac{1}{2}\right)^2} \right) = m\lambda z, \quad (4.42)$$

Y la geometría de las franjas de interferencia es un conjunto de hipérbolas teniendo como asíntotas el eje- x_0 . El hecho de que los términos de fase tienen dos posibles representaciones implica que las franjas de interferencia emergen de la región focal “fluyendo” hacia la región de fase cuadrática teniendo un comportamiento asíntótico, estas afirmaciones están de acuerdo con las Ecs. (4.41) y (4.42). La interferencia ocurre solamente en regiones donde la función de fase es uní-valuada. Entonces tenemos que las fuentes de las franjas de interferencia están dispuestas sobre la región

focal justificando de esta forma sus propiedades de carga topológica. Este comportamiento puede ser observado por medio de simulaciones computacionales mostradas en la Fig. (4.8)

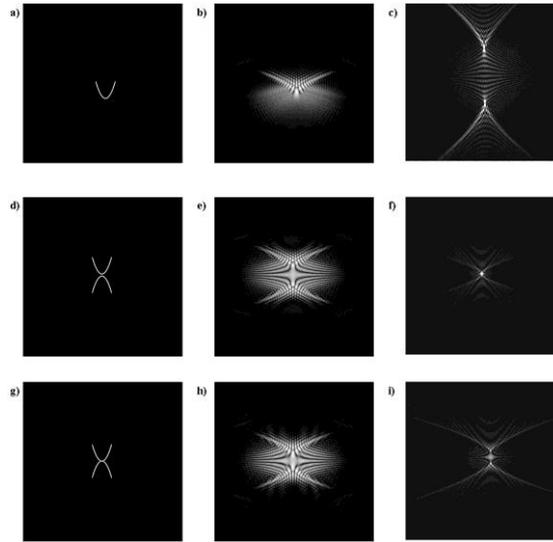


Fig. (4.7) a) Rendija de forma parabólica usada como condición de frontera para generar regiones tipo Pearcey mostradas en b) y d), esta configuración permite una interacción sintonizable entre regiones cúspide, estas son mostradas para distintas distancias entre estas en e), f), h), i).

4.2.4 Conclusiones.

Hemos presentado un análisis para la interacción entre dos campos ópticos emergiendo de dos rendijas de forma parabólica, esta configuración corresponde a una versión topológica del interferómetro de Young. El campo de difracción emergiendo de cada parábola tiene asociada una región focal correspondiente a una curva de tipo cúspide. El estudio de los campos ópticos fue descrito analizando dos tipos de interacción óptica. La primera de ella, fue la transferencia de irradiancia entre las regiones focales usando la ecuación de transporte de irradiancia, mostramos que las regiones focales son capaces de transferir energía a otras regiones del campo óptico. Para la geometría propuesta, mostramos la generación de un canal de irradiancia conectando los dos puntos

cúspide, constituyendo una extensión de las regiones focales, ofreciendo este hecho aplicaciones interesantes, en particular, este puede ser implementado como una guía de luz así como en pinzas ópticas sintonizables. El segundo efecto analizado fue la interacción de amplitud, donde son generados efectos de interferencia interesantes, por medio de este análisis se demostró que las franjas de interferencia emergen de puntos sobre la región focal teniendo un comportamiento asintótico hacia el eje x_0 sin cruzar por el canal de irradiancia, estos efectos fueron manifestados en regiones con función de fase cuadrática. En regiones donde las funciones de fase corresponden a una función de catástrofe, no se manifiestan efectos de interferencia. Las simulaciones computacionales junto con los resultados experimentales están de buen acuerdo con el análisis realizado. Finalmente, el interferómetro topológico de Young, donde la rendija tiene una curvatura arbitraria, puede usarse para predecir y controlar otros efectos ópticos tales como bifurcaciones, vórtices, etc.

CAPITULO 5.

PROPIEDADES FÍSICAS DE REGIONES FOCALES.

5.1 Cinemática de regiones focales.

5.1.1 Introducción.

Describimos la interacción entre regiones focales y analizamos las propiedades físicas resultantes. El estudio es soportado por el hecho de que las regiones focales exhiben propiedades de tipo partícula y las interacciones entre ellas presentan comportamientos similares a una colisión inelástica. Cuando las regiones focales son generadas en un medio con índice de refracción aleatorio, la distribución de irradiancia a lo largo de las RF cambian de acuerdo con un proceso de difusión y la colisión entre ellas genera efectos de tipo vórtice. Este estudio fue implementado resolviendo la ecuación de transporte de irradiancia. Resultados experimentales están en buena concordancia con el modelo teórico desarrollado.

Las propiedades físicas de un campo óptico pueden obtenerse del frente de onda, que es una superficie que puede ser representada en una forma paramétrica como [31, 60]

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \quad (5.1)$$

Ya que para obtener una representación matemática de la geometría del frente de onda $z = F(x, y)$, libre de los parámetros (u, v) , las funciones paramétricas Ec. (5.1) deben ser invertibles y el determinante de la matriz de transformación debe ser diferente de cero:

$$\det M(u, v) = \det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \neq 0, \quad (5.2)$$

En donde $(x_{u,v}, y_{u,v})$ representa las derivadas parciales. Entonces tenemos que la matriz es de rango 2; sin embargo, existen regiones ópticas donde el rango es menor que 2, lo cual es la definición matemática de singularidad. En la vecindad de esas regiones singulares, son detectadas propiedades físicas interés en este análisis. Cuando el rango de la matriz es cero, la singularidad corresponde a un punto, y cuando el rango de la matriz es 1 esta corresponde a una curva [31]. De estos resultados, conocemos que la geometría de singularidades ópticas es de curvas o de puntos. Singularidades también son conocidas como regiones focales o causticas y estas son generadas por la envolvente de un conjunto de trayectorias ortogonales al frente de onda [1, 3, 26, 61, 62]. En este análisis nos enfocamos en la investigación de la interacción entre dos regiones focales. Estas pueden ser generadas en un medio con índice de refracción aleatorio cuyos parámetros estadísticos son independientes del tiempo. Para mantener un punto de vista geométrico, proponemos que las fluctuaciones aleatorias del índice de refracción son equivalentes a una superficie rugosa dinámica en el sentido de que ambos de ellos generan las mismas regiones focales. Mostraremos que cada interacción produce redistribución de irradiancia, generando luz guiada a lo largo de las regiones focales. Durante el periodo de interacción, parte de la energía modifica la geometría de la región focal mientras que otras podrían generar efectos de tipo vórtice, estas propiedades son analizadas en el presente estudio. El análisis es soportado por el hecho de que las regiones focales exhiben propiedades adiabáticas [29, 63], lo cual significa que cada campo óptico tiene propiedades de tipo partícula y la interacción entre regiones focales pueden modelarse como colisión entre partículas,

estableciendo una analogía directa con sistemas mecánicos. La evolución espacio-temporal de regiones focales presenta dos propiedades importantes, la primera consiste en el comportamiento de causticas libres de interacción. Esta evolución en un medio con índice de refracción aleatorio genera cambios morfológicos siguiendo un proceso de difusión. La otra propiedad importante ocurre durante la interacción entre dos RF cuyo comportamiento es similar a una colisión inelástica, lo cual significa que las RF son conectadas una con otra por un punto de contacto. Esta interacción es analizada desde la ecuación de transporte de irradiancia [64-66] y es implementada experimentalmente propagando una onda plana a través de un medio con índice de refracción aleatorio. El medio es obtenido por agua calentada a una temperatura arriba de $\sim 80^{\circ}\text{C}$ y dejando enfriar esta hasta llegar a temperatura ambiente. La temperatura del agua no es uniforme generando un índice de refracción aleatorio. Iluminando el contenedor de agua con una onda plana, el campo óptico genera regiones focales dinámicas cuya interacción es detectada con una cámara CCD.

5.1.2 Descripción y síntesis de RF.

Para describir las propiedades físicas de causticas, mantenemos un punto de vista geométrico. El tipo de fluctuación del índice de refracción en consideración del volumen es equivalente a una condición de frontera aleatoria que es interpretada como una superficie rugosa cuyo perfil cambia con el tiempo, como se puede ver en la Fig. (5.1). De esta forma, los dos sistemas son equivalentes en el sentido de que ambos generan las mismas regiones focales. Como una consecuencia del teorema de limite central, consideramos que la distribución de alturas para la superficie rugosa equivalente obedece a una función de densidad de probabilidad Gaussiana con varianza dependiente del tiempo [67,68], representada por

$$\rho(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2(t)}\right]. \quad (5.3)$$

Es bien conocido que esta función satisface la ecuación de difusión. Esta propiedad permite mantener un punto de vista geométrico, el cual es necesario para explicar la cinemática de regiones focales. En la Fig. (5.1) esquematizamos el hecho de que solo algunas regiones de la superficie rugosa generan regiones focales cuyo perfil es dado por $z = f(ax)$, en donde $a(t)$ cambia como una función del tiempo. Algunas otras propiedades interesantes de regiones focales pueden encontrarse en [55]. Por lo tanto, podemos seleccionar un conjunto de trayectorias ortogonales a la condición de frontera, generando una curva envolvente que corresponde con la región bajo estudio. La región focal corresponde a la envolvente de los centros de curvatura de la condición de frontera $y = f(ax)$, y la expresión matemática para el centro de curvatura (α, β) es dada por [1, 2, 9]:

$$\alpha(x, a) = x - y \frac{1+a^2y'^2}{y''} \quad (5.4.a)$$

$$\beta(x, a) = y + \frac{1+a^2y'^2}{y''} \quad (5.4.b)$$

De estas expresiones, es fácil identificar el comportamiento no-lineal de la región focal, caracterizado por el cambio en la longitud de arco s , cuya expresión matemática está dada por

$$\Delta s = \int_1^{a_f} \frac{1}{y''} \sqrt{y'^2 \left(\frac{1}{a^2} - y'^2 \right)^2 + \frac{4}{a^6 y'^2}} da, \quad (5.5)$$

de donde se puede notar que los cambios pequeños en el parámetro a implican cambios notables en la geometría de la región focal, como una consecuencia, la irradiancia es redistribuida continuamente a lo largo de esta. Previos comentarios pueden resumirse en Fig. (5.2), que muestra la síntesis de una curva envolvente, donde una alta densidad de trayectorias es identificada en la vecindad de las regiones focales y entonces procesos de difusión óptica son esperados.

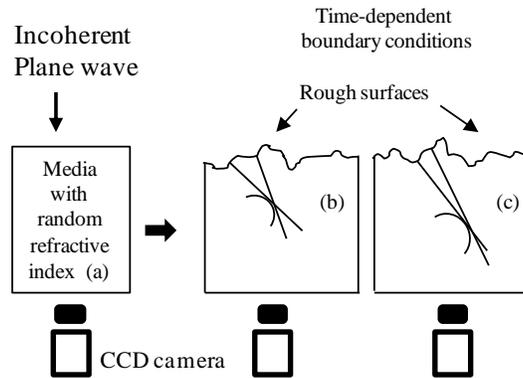


Fig. (5.1) (a) Montaje experimental para generar la interacción entre regiones focales. (b) y (c) muestran los sistemas equivalentes para dos instantes de tiempo. En (a), la RF es generada por la propagación de una onda plana a través de un medio aleatorio. En (b) y (c), la RF es generada por trayectorias ortogonales a la superficie rugosa para dos diferentes instantes de tiempo.

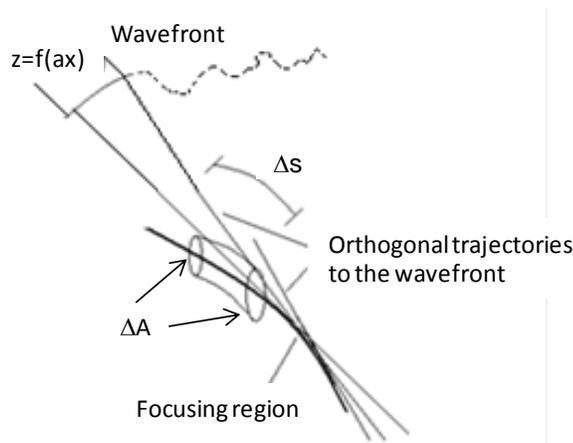


Fig. (5.2) Síntesis de RF usando la envolvente de un conjunto de rayos.

5.1.3 Procesos de difusión en RF.

La función de irradiancia satisface la ecuación diferencial de difusión,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial s^2} = D \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (5.6)$$

donde s es la longitud de arco, I es la función de irradiancia, y D es la constante de difusión. Esta relación será analizada más adelante. Note que el tipo de fluctuación aleatoria del índice de refracción tiene una densidad de probabilidad Gaussiana, que es consecuencia del teorema de límite central. Dado que las trayectorias que generan a la región focal son ortogonales al frente de onda, es de esperarse que los efectos de difusión aparecerán a lo largo de la esta, lo cual se concluye que esta debe corresponder con una curva de acuerdo con la definición de singularidad. La ecuación de difusión se cumple bajo soluciones con dependencia exponencial decreciente en el tiempo, y la solución entera es dada por

$$I(x, y, z, s, t) = I_0(x, y, z) \cos(\beta s + \mu) \exp(-ht), \quad (5.7)$$

donde μ es una constante de fase, los términos armónicos describen luz guiada a lo largo de la longitud de arco. La estructura de la condición de frontera para la ecuación de difusión dada por $I_0(x, y, z)$, debe satisfacer la ecuación de transporte de irradiancia [65] y esto será analizado en la siguiente sección. Para corroborar los procesos de difusión, propagamos una onda plana a través de un medio con índice de refracción aleatorio generado por agua calentándose. Los resultados experimentales obtenidos son mostrados en la secuencia de imágenes en Fig. (5.4). La región de interés es encerrada en un círculo de aproximadamente 5mm de diámetro, de hecho las regiones focales son fácilmente detectables siempre sin algún sistema óptico adicional. Las regiones focales son denotadas por (1) y (2) y fueron detectadas usando una cámara CCD como es mostrado en la Fig. (5.1). El punto extremo de la región (1) se mueve hacia la región (2) hasta que este lo alcanza y es entonces conectado en el punto de contacto, análogo a una colisión inelástica. Como conclusión

parcial, la irradiancia para una región focal en un medio aleatorio cambia su geometría siguiendo un proceso de difusión manifestado a lo largo de la longitud de arco.

5.1.4 Interacción entre regiones focales.

El siguiente punto importante de este estudio es analizar la interacción entre regiones focales. Consideramos que las ondas planas son propagadas a lo largo de la coordenada z y que los cambios en la irradiancia son detectados en el plano transversal, x - y . La parte espacial de la función de irradiancia representada por $I_0(x, y, z)$ satisface la ecuación de transporte de irradiancia, dada por

$$\vec{\nabla}_{\perp} \cdot \left(I_0(x, y, z) \vec{\nabla}_{\perp} L(x, y, z) \right) + \frac{\partial}{\partial z} I_0(x, y, z) = 0, \quad (5.8)$$

donde L es la función de fase y $\vec{\nabla}_{\perp}$ es el operador transversal de Laplace. Ya que el índice de refracción cambia aleatoriamente, la morfología de la región focal también cambia. Una idea geométrica de la interacción entre estas es mostrada en la Fig. (5.3).

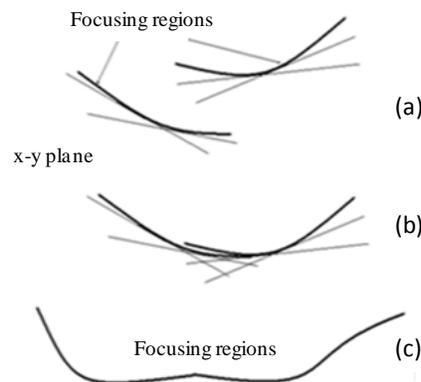


Fig. (5.3) a) Regiones focales generadas por la envolvente de trayectorias, b) interacción entre dos regiones focales, c) generación de una nueva región focal.

Para describir las propiedades físicas de la interacción, proponemos que en el punto de contacto (x, y, z) la irradiancia es dada por

$$I(x, y, z) = I_1(x, y, z) + I_2(x, y, z), \quad (5.9)$$

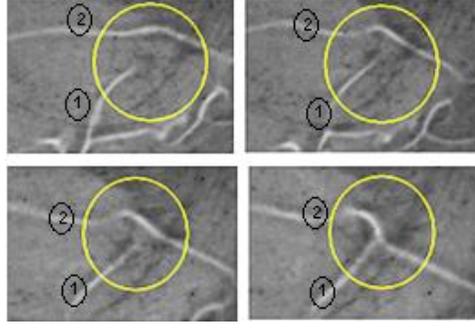


Fig. (5.4). Los círculos encierran los procesos de difusión para la RF (1), Los círculos encierran los procesos de difusión para la región focal. (1), la cual se mueve hacia la (2) hasta que estas son conectadas en el punto de contacto. La duración del proceso es de $\sim 1s$, usando como fuente luminosa luz solar.

y la función de fase está dada por una diferencia de fase entre los correspondientes campos ópticos,

$$L(x, y, z) = L_1(x, y, z) - L_2(x, y, z) \quad (5.10)$$

Sustituyendo (9) y (10) en la ecuación de transporte de irradiancia, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_\perp I_1 \cdot \vec{\nabla}_\perp L_1 + I_1 \cdot \vec{\nabla}_\perp^2 L_1 - \vec{\nabla}_\perp I_2 \cdot \vec{\nabla}_\perp L_2 - \\ - I_2 \cdot \vec{\nabla}_\perp^2 L_2 + \vec{\nabla}_\perp \cdot (I_1 \vec{\nabla}_\perp L_2 - I_2 \vec{\nabla}_\perp L_1) = \\ = -\frac{\partial I_1}{\partial z} - \frac{\partial I_2}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.11)$$

En donde la interacción entre las regiones focales es determinada por el término $I_{int} = \vec{\nabla} \cdot (I_1 \vec{\nabla}_\perp L_2 - I_2 \vec{\nabla}_\perp L_1)$. Definimos la densidad de corriente de irradiancia como la función vectorial

$$\vec{J}_{12} = I_1 \vec{\nabla}_\perp L_2 - I_2 \vec{\nabla}_\perp L_1. \quad (5.12)$$

Durante el periodo de interacción la irradiancia está fluyendo a lo largo de la RF, la cual debe satisfacer la ecuación de continuidad como una consecuencia de conservación de energía:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{12} = \frac{\partial I_{12}}{\partial t}, \quad (5.13)$$

donde \vec{J}_{12} es la irradiancia fluyendo entre las RF. Un resultado inesperado fue identificado en la secuencia de imágenes mostrada en Fig. (5.5). En el punto de contacto las RF son conectadas y demuestran una tendencia a generar una sola RF. Durante el periodo de interacción una de las RF se muestra más brillante, lo cual es una evidencia experimental de que la irradiancia fluye a lo largo de la RF. Cuando la interacción cesa, la densidad de corriente de irradiancia,

\vec{J}_{12} es cero:

$$I_1 \vec{\nabla}_\perp L_2 - I_2 \vec{\nabla}_\perp L_1 = 0, \quad (5.14)$$

y los vectores gradientes son paralelos:

$$\vec{\nabla}_\perp L_2 = \frac{I_2}{I_1} \vec{\nabla}_\perp L_1. \quad (5.15)$$

La interpretación física de la Ec. (5.15) es que la interacción de irradiancia tiene la estructura de una colisión inelástica, esto significa que las dos RF están juntas generando una sola, como es mostrado en la secuencia de imágenes de la Fig. (5.5). Debe ser notado que las RF son conectadas en el punto de contacto y una tendencia a crecer el número de puntos de contacto es observado, generando de esta manera una sola RF. Otra característica importante es la generación de propiedades tipo-vórtice cuya estructura puede ser obtenida tomando el rotacional de la Ec. (5.12), obteniendo

$$\vec{\nabla}_\perp \times \vec{J} = \vec{\nabla}_\perp I_1 \times \vec{\nabla}_\perp L_2 - \vec{\nabla}_\perp I_2 \times \vec{\nabla}_\perp L_1. \quad (5.16)$$

El modulo del rotacional depende principalmente del signo de cada termino, que es relacionado a la curvatura de la RF. Cuando el vector de curvatura de cada RF tiene el mismo signo, el modulo del rotacional tiene un valor bajo y la cinemática de las RF conectadas es principalmente de traslación. Cuando el vector de curvatura tiene un signo opuesto, el rotacional toma valores más altos y este tiene un comportamiento de tipo vórtice. Estos dos escenarios son ilustrados en la Fig. (5.6), y los resultados experimentales son mostrados en la Fig. (5.7) reforzando los comentarios anteriores, de donde las características de tipo vórtice son evidentes.

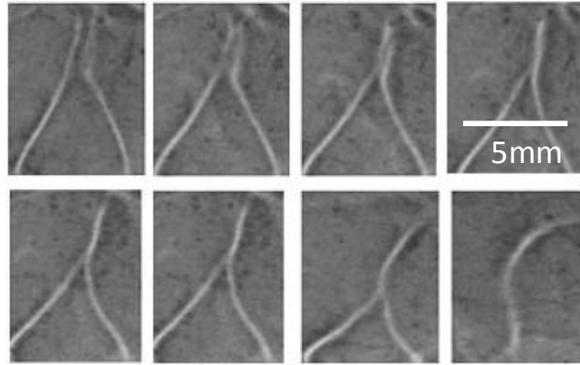


Fig. (5.5) Interacción experimental entre dos regiones focales. La interacción tiene comportamiento similar a una colisión inelástica. El tiempo de duración del proceso es de cerca de 1 seg.

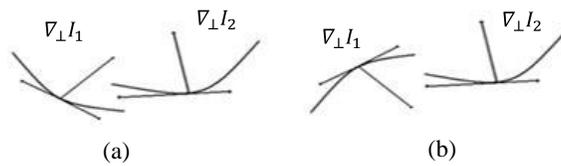


Fig. (5.6) Tipos de interacción entre regiones focales, a) ambas regiones focales RF, tienen el mismo signo de curvatura, b) caso de signos opuestos.

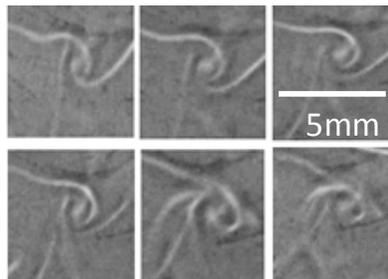


Fig. (5.7) Secuencia de imágenes que muestra la evolución para la interacción entre regiones focales con signos de curvatura opuestos, generando propiedades de tipo vórtice. El tiempo de duración es del orden de 1 seg.

5.1.5 Conclusiones

En conclusión, analizamos la cinemática de regiones focales, para realizar este estudio fue necesario generar RF dinámicas, esto fue posible por la propagación de luz a través de un medio de índice de

refracción aleatorio. Podemos distinguir dos propiedades importantes: (1) demostramos que los cambios morfológicos de una sola RF sigue un proceso de difusión, debido a las singularidades que tienen la curva rendija de forma curva, el proceso de difusión es manifestado por cambios en la longitud de arco y curvatura de la RF. (2) Otra propiedad inesperada es que la interacción entre RF muestra una similitud con colisiones inelásticas, esto ocurre cuando RF colisionan y entonces son conectadas en un punto de contacto. Para describir esta interacción usamos la ecuación de transporte de irradiancia que conduce a identificar el término que describe como la irradiancia y fase de cada RF es distribuida. De este término, propiedades de tipo vórtice pueden ser observadas, estableciendo una similitud con los sistemas mecánicos ya que la estructura vórtice está relacionada con el transporte de momento angular. Los resultados experimentales están en buena concordancia con el modelo teórico desarrollado. Finalmente como una consecuencia de la analogía mecánica, RF pueden ser descritas por medio de sus centros de irradiancia, que es análogo al centro de masa. El estudio presente puede ser usado para atrapamiento óptico dinámico y desarrollo de motores ópticos. Algunos comentarios siguientes serán explicados usando nuestro modelo en un artículo futuro.

5.1.6 Equivalencia entre el volumen del medio con índice de refracción aleatorio con la superficie dinámica rugosa.

En este apéndice mostramos la equivalencia entre la propagación de luz a través de un medio con índice de refracción aleatorio y el campo de difracción emergente de una superficie rugosa. El estudio es realizado interpretando el medio aleatorio como un arreglo de estratos delgados dependiendo de las coordenadas espaciales x - y y del tiempo como es mostrado en Fig. (5.8). De esta manera, cada rebanada puede ser interpretada como una transmitancia de fase aleatoria, la interpretación para la i -ésima transmitancia está dada por $T_i(x, y, t)$. Entonces, la propagación de

luz a través del volumen de medio aleatorio es equivalente a analizar la propagación de luz a través de un conjunto de transmitancias en arreglo tándem. El conjunto de transmitancias es iluminado por una fuente puntual dispuesta a una distancia z de la superficie como es mostrado en la Fig. (5.8). Considerando una sola transmitancia, el campo difractado en la región de Fraunhofer, corresponde con la transformada de Fourier de la función de transmitancia dada por

$$\begin{aligned}
 \varphi(u, v, z = 0) &= \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} t_i(x, y) \exp(-i2\pi(xu + yv)) dx dy \\
 &= T_i(u, v), \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

donde $u = x_0/\lambda z$, $v = y_0/\lambda z$ y z_1 es la distancia de la fuente puntual al plano de la transmitancia. Remarcamos que la distancia z_1 aparece como un factor de escala en la Transformada de Fourier, y esto puede ser prueba de que esta sintetizado, en una manera virtual, en plano de la superficie. Considerando ahora, la propagación a través de la segunda transmitancia, el campo de difracción de Fraunhofer adquiere la forma de función de convolución entre la transformada de Fourier de cada transmitancia dada por

$$\begin{aligned}
 \varphi(u, v, z = 0) &= \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} t_1(x, y, t) t_2(x, y, t) \times \exp(-i2\pi(xu + yv)) dx dy \\
 &= T_1(u, v, t) \otimes T_2(u, v, t) \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

En donde \otimes representa la operación de convolución. Tomando en cuenta el conjunto completo de transmitancias, el campo de difracción de Fraunhofer toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \varphi(u, v, z = 0) &= \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} \prod t_i(x, y, t) \times \exp(-i2\pi(xu + yv)) dx dy \\
 &= T_1(u, v, t) \otimes T_2(u, v, t) \dots \otimes T_n(u, v, t)
 \end{aligned}$$

$$= T(u, v, t). \quad (5.19)$$

Esta ecuación implica que el campo difractado de Fraunhofer asociado al conjunto de transmitancias en arreglo tándem es generado en forma virtual, en la superficie de la fuente. Esto es fácilmente corroborado observando la fuente luminosa a través del medio aleatorio.

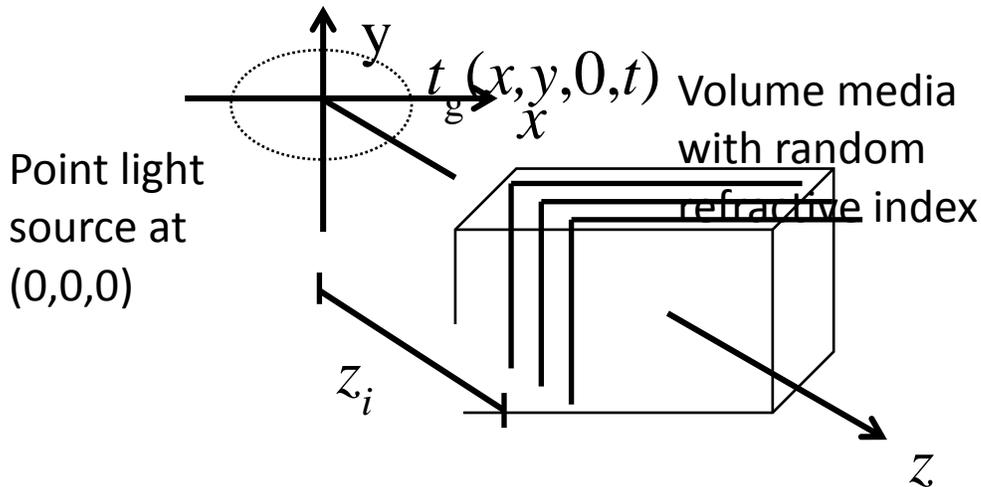


Fig. (5.8) Difracción de Fraunhofer generada en una fuente plana. Es fácil identificar a través del medio aleatorio.

Consecuentemente, es posible asociar una sola función de transmitancia t_g , cuya representación corresponde con la transformada inversa de Fourier del campo de difracción de Fraunhofer dado por

$$t_g(x, y, t) = F^{-1}(T_1(u, v, t) \otimes T_2(u, v, t) \dots \otimes T_n(u, v, t)). \quad (5.20)$$

Siguiendo este tipo de análisis, es posible asociar la función de transmitancia Ec. (5.20) con la superficie rugosa. Esto puede entenderse considerando la superficie rugosa como un conjunto de estratos delgados, justificando de esta forma la equivalencia entre la propagación de luz a través del volumen del medio con índice de refracción aleatorio y la superficie rugosa.

5.1.7 Procesos de difusión para regiones focales.

En esta sección, justificamos los procesos de difusión que pueden ocurrir en la vecindad de las regiones focales. Los parámetros involucrados en este análisis son esquematizados en la Fig. (5.2) Para el análisis, definimos la función $f(s, t)$ como una función asociada a la densidad de rayos en la vecindad de la región focal. Esta se relaciona a la función de irradiancia por

$$I(s, t) = af(s, t)\Delta A, \quad (5.21)$$

De donde ΔA es el elemento de área perpendicular a la región focal y a es una constante de proporcionalidad. Tomando la derivada parcial respecto del tiempo en la función de irradiancia, se tiene

$$a\Delta A \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (5.22)$$

Tomando ahora la derivada de la densidad de rayos, cuando la longitud de arco se incrementa en una distancia Δs , obtenemos

$$a\Delta s\Delta A \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} = \Delta s \frac{\partial I}{\partial s} = \Delta t \frac{\partial I}{\partial t} \quad (5.23)$$

Donde Δt es el tiempo necesario para que una región focal incremente su longitud Δs . Podemos ahora reescribir la última ecuación como

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{\partial I(s, t)}{\partial s} = \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (5.24)$$

La rapidez de cambio de la región focal está dada por $v = \Delta s / \Delta t$, consecuentemente, la última expresión adquiere la forma

$$v \frac{\partial I(s, t)}{\partial s} = \frac{\partial I}{\partial t} \quad (5.25)$$

El termino $\nu I(s, t)$, describe el cambio de la función de irradiancia cuando es redistribuida a lo largo de la longitud de arco, entonces tenemos

$$\nu I(s, t) = b \frac{\partial I(s, t)}{\partial s}, \quad (5.26)$$

La cual puede considerarse como ley de Fick, donde b es otra constante de proporcionalidad. Sustituyendo Ec. (5.2.6) en Ec. (5.2.5) finalmente obtenemos

$$\frac{\partial^2 I(s, t)}{\partial s^2} = D \frac{\partial I}{\partial t} \quad (5.27)$$

La cual es la ecuación de difusión y D es la constante de difusión.

5.2 Propiedades fractales y métricas del campo óptico en regiones focales.

5.2.1 Introducción.

En la evolución espacial y temporal de los campos ópticos, pueden ser detectados efectos de compresión en la función de amplitud. Este confinamiento induce cambios en la función de fase y consecuentemente variaciones en el índice de refracción efectivo, siendo dominantes en la vecindad de regiones focales. En el presente trabajo describimos los cambios en el índice de refracción usando la ecuación logística, este punto de vista, permite un análisis de estabilidad estructural del campo óptico. Como un resultado importante, asociamos a la función de fase, propiedades fractales y proponemos para el cálculo de dimensión una relación a lo largo de la longitud de arco de la condición de frontera con la longitud de arco de su región focal correspondiente, estos conceptos son relacionados con la evolución de entropía en el campo óptico. Mostramos que los efectos de

compresión son asociados con la generación de nuevos efectos como los procesos de auto-refracción.

En esta sección analizamos el cambio en las propiedades del campo óptico emergente de un conjunto de regiones parabólicas como condición de frontera. La evolución del campo está influenciada por una auto-interacción controlada por la función de curvatura de la condición de frontera, la evolución genera efectos de compresión de amplitud. Para la medida de los efectos de compresión respecto a la función de curvatura hemos tomado un conjunto de funciones cuadráticas con diferentes factores de escala. El estudio es soportado por el hecho de efectos no-lineales incrementan progresivamente la función de amplitud en la dirección normal a la condición de frontera siendo un máximo en la región focal. La región focal es formada por la envolvente de los radios de curvatura de la condición de frontera y es una región con alta densidad de campo resultante de un efecto colectivo de todo el campo emergente. La interacción del campo en esta región con el campo propagado es un proceso dinámico auto-regulado y genera efectos interesantes tales como bifurcaciones, esto significa que el valor para la función de fase del campo no es único. La interpretación física consiste en inducir cambios en el índice de refracción efectivo como consecuencia de los efectos de compresión, generando comportamiento de bifurcación y vórtices. Para este análisis, proponemos una descripción dinámica de este Sistema óptico a través de la ecuación logística para cuantificar los cambios en el índice de refracción efectivo, esto permite identificar propiedades fractales de la función de fase que conduce a un comportamiento auto-regulado del campo óptico. El efecto de bifurcación es un efecto de especial interés para la función de fase, por causa de un salto en el valor de la función de amplitud el cual corresponde a una condición de entropía, esta propiedad es la responsable de generar efectos físicos novedosos, en particular los efectos de auto-refracción como es descrito más Adelante.

5.2.2 Ecuación logística para el índice de refracción efectivo.

Las propiedades fractales son generadas por efectos no-lineales que pueden ser identificados desde la ecuación logística para la función de fase. Tomamos como prototipo el Sistema óptico cuya condición de frontera caracterizada por una curva rendija la cual es iluminada por una onda plana. En esta configuración, la región focal es la envolvente de los radios de curvatura de la condición de frontera sobre el plano normal. El campo emergente propagado de la condición de frontera interactúa con el campo emergente de los puntos vecinos generando efectos de compresión progresivos en dirección normal de la curva, esto puede modelarse por medio de la ecuación logística. Tomando en cuenta que la función de fase para una simple trayectoria sigue un comportamiento lineal debido a que en esta no se representan interacciones, sin embargo al tomar en cuenta los efectos colectivos para un conjunto de trayectorias induce efectos no-lineales en la vecindad de regiones focales. En la Fig. (5.9) se muestra la generación de una RF.

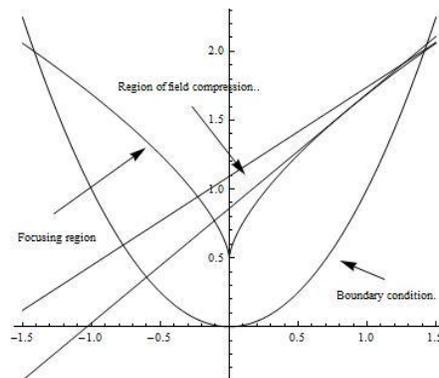


Fig. (5.9). Generación de región focal y descripción de procesos de compresión.

La no-linealidad más pequeña tiene una representación cuadrática, para este caso la función de fase está dada por la ecuación logística,

$$\frac{dL}{d\mu} = rL(1 - L), \quad (5.28)$$

Con μ la distancia en dirección normal, y L la función de fase, y r es un parámetro que depende de la curvatura de la condición de frontera.

Los efectos de compresión máximos son generados en la vecindad de la región focal, y actúa como un tractor, en este sentido este corresponde como un sumidero para el campo óptico, este último comentario puede justificarse de un análisis de estabilidad para la ecuación logística Ec. (5.28). Analizamos el valor para la función de fase L sobre los puntos fijos que satisfacen la condición,

$$\frac{dL}{d\mu} = 0, \quad (5.29)$$

Si expresamos la Ec. (5.28) como diferencias discretas,

$$\frac{L_{n+1}-L_n}{\mu_{n+1}-\mu_n} = rL_n(1-L_n), \quad (5.30)$$

Para intervalos del espacio $\mu_{n+1} - \mu_n = 1$, la ecuación logística en forma iterada está dada por la expresión,

$$L_{n+1} = rL_n(1-L_n), \quad (5.31)$$

La evolución de los valores de fase está dados por la Ec. (5.31) y esta evolución para distintos valores del parámetro r es mostrado en el diagrama de tela de araña Fig. (5.10). El cual se construye como un diagrama de los valores de fase L_n vs. L_{n+1} . El objetivo de hacer esta construcción es analizar la convergencia de la fase dado un valor del parámetro r , esto equivale a analizar el comportamiento de las diferencias $\Delta_n = L_n - L$ (Ec. (8)), donde L corresponde a un punto fijo de fase cuya representación gráfica está dada por una línea recta con pendiente $m = 1$, considerando que para punto fijo se satisface la condición $L_{n+1} = L_n$. Dado que la ecuación logística en forma de diferencias discretas es una ecuación iterada, cuando se da un valor de fase inicial, el siguiente es dado siguiendo la Ec. (5.31), es decir para un valor de fase inicial L_0 se tiene $L_1 = rL_0(1-L_0)$, el cual será representado como un punto sobre una parábola dado que la ecuación logística es una ecuación cuadrática en diferencias discretas, este punto es conectado con el punto correspondiente de la recta de puntos fijos (L_1, L_1) , este último punto es conectado a su vez con el correspondiente punto mapeado siguiendo la Ec. (5.31) el cual será $L_2 = rL_1(1-L_1)$, que es un punto sobre la

parábola, el cual se conectara a su vez con el correspondiente punto sobre la recta de puntos fijos (L_2, L_2) , este mismo proceso se realiza consecutivamente para los siguientes valores de n . Es importante resaltar el punto fijo asociado a la primera iteración de la ecuación logística corresponde con el punto de intersección de la recta de puntos fijos con la parábola de soluciones de la Ec. (5.31) dado un valor del parámetro r , para la segunda iteración se tendrán dos puntos estables que corresponden a la intersección de la recta con una curva de una ecuación de cuarto grado dada en la Ec. (5.39), la cual resulta de una segunda iteración de la ecuación logística, en este caso se tiene una bifurcación, y consecutivamente se tendrá por cada iteración una bifurcación resultante por cada punto fijo resultante de la iteración anterior. En este análisis se hace un estudio ilustrativo del estado del sistema óptico con una bifurcación.

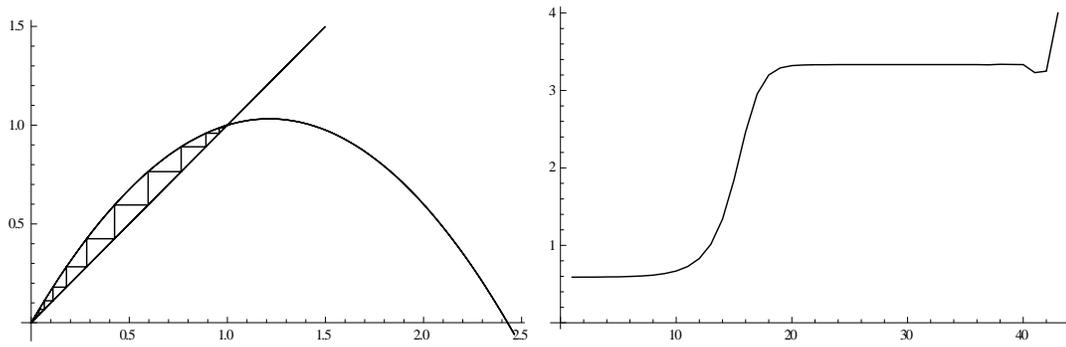


Fig. (5.10.a) Solución de fase tipo asintótico, en este caso se tiene un punto fijo de tipo inestable.

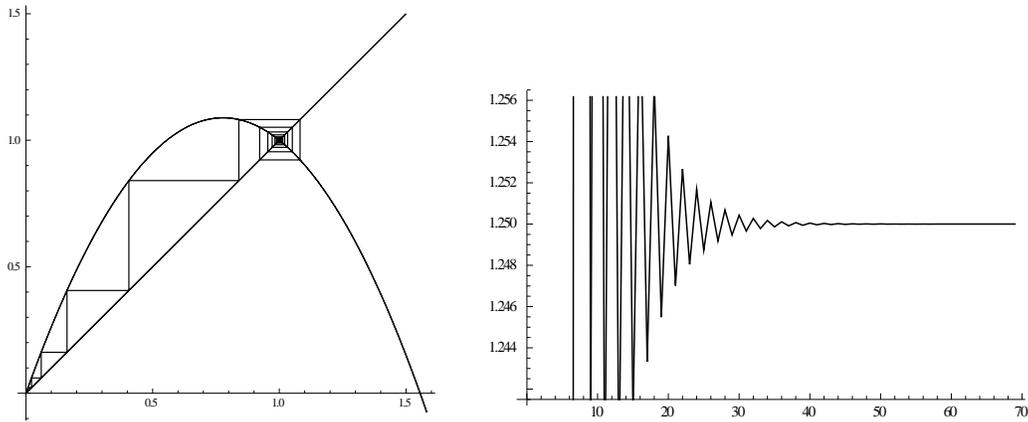


Fig. (5.10.b) En este caso el punto fijo de tipo estable representa un atractor de fase.

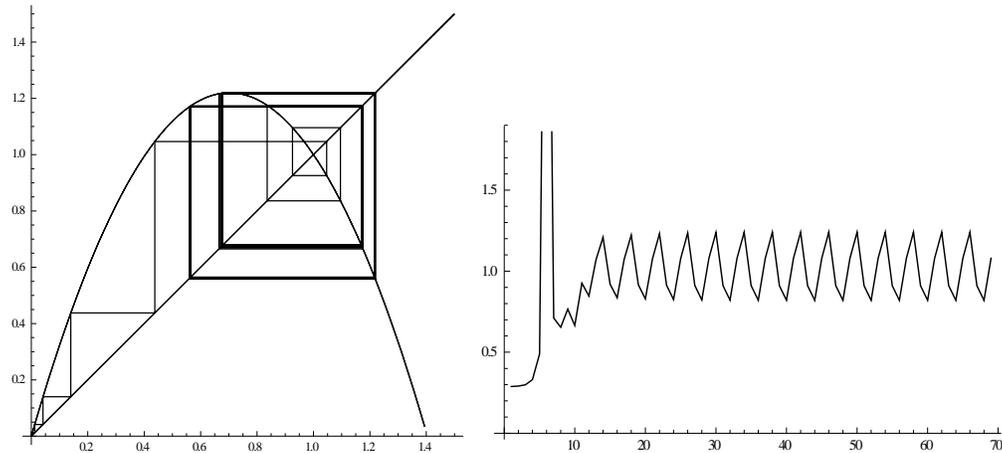


Fig. (5.10.c) Caso de una bifurcación en donde se tienen dos atractores.

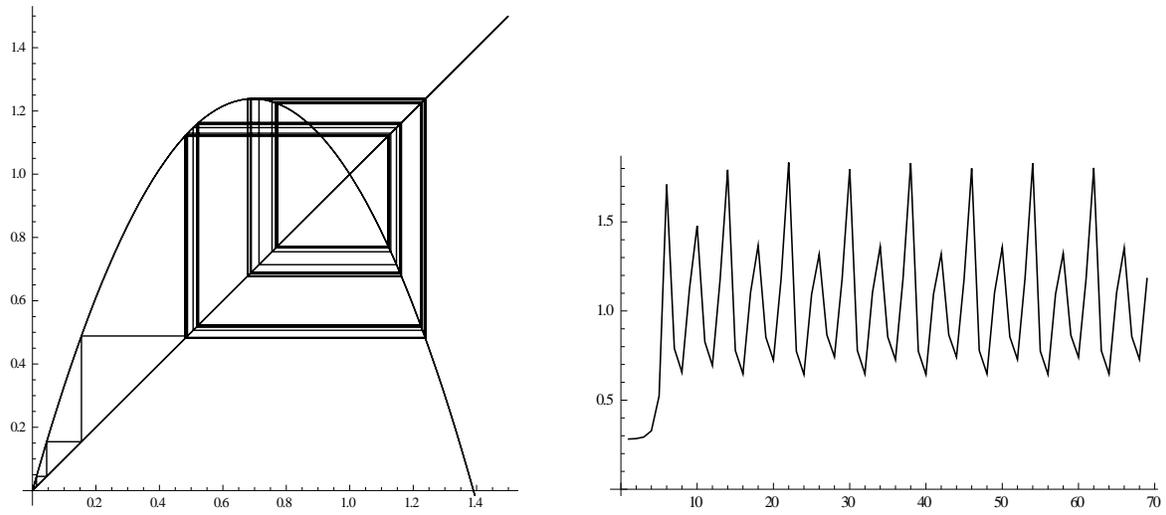


Fig. (5.10.d) Estado con doble bifurcación y cuatro atractores.

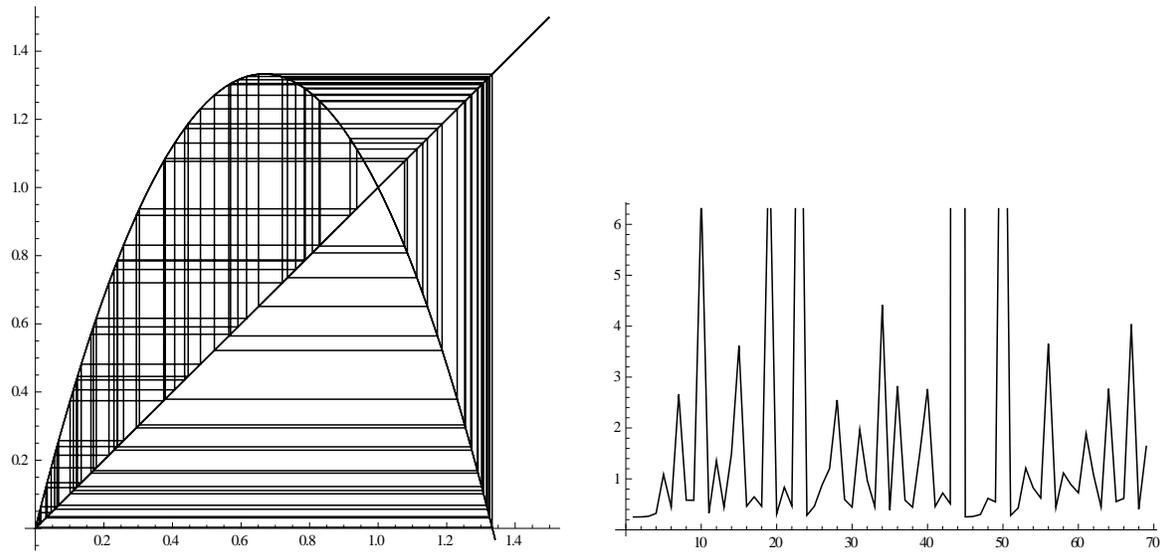


Fig. (5.10.e) Estado de caos, el sistema tiende a un número infinito de atractores representados por puntos sobre la recta.

Para un punto fijo $L_n = L$,

$$L = rL(1 - L), \quad (5.32)$$

$$L = 1 - \frac{1}{r} \quad (5.33)$$

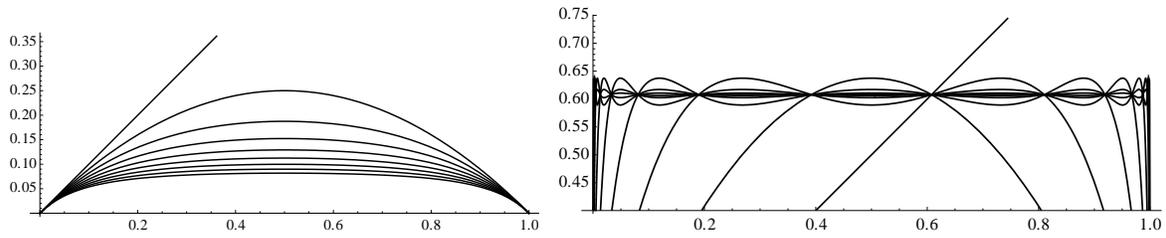
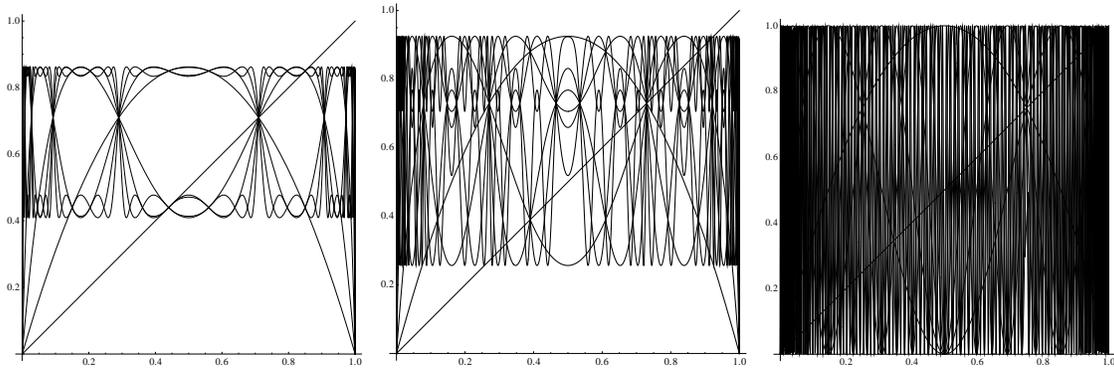


Fig. (5.11) a) Estado del sistema sin punto atractor, b) Estado del sistema con un atractor.



c) Estado del sistema con una bifurcación, d) paso intermedio a estado de caos y e) Estado de caos.

El estudio estándar de estabilidad es obtenido dando un incremento para cada fase L_n cerca del punto fijo de fase L para la relación de recurrencia

$$f = f(L) = rL(1 - L), \quad (5.34)$$

La fase cerca de los puntos fijos de la función de fase es expresada

$$L_n = L + \Delta_n, \quad (5.35)$$

Con Δ_n , el correspondiente incremento respecto de la fase L . Aplicando la Ec. (5.34), obtenemos,

$$\begin{aligned} f(L_n) &= f(L + \Delta_n) \\ &= f(L) + f'(L)\Delta_n \\ &= L + f'(L)\Delta_n \end{aligned} \quad (5.36.a)$$

$$f(L_n) = L_{n+1} = L + \Delta_{n+1} \quad (5.36.b)$$

De Ecs. (5.36.a) y (5.36.b), obtenemos las ecuaciones iteradas

$$\Delta_{n+1} = f'(L)\Delta_n \quad (5.37)$$

En el análisis estándar de estabilidad y caos la Ec. (5.37) es llamada *mapeo linealizado*, y es equivalente a una ecuación de eigen-valores con eigen-valor $\lambda = f'(L)$. Su representación asociada a cada valor del parámetro r se representa en Fig. (5.10), con su respectiva grafica de tela de araña.

Obtenemos los siguientes casos para la clasificación de puntos fijos

$$\lambda < 1, \quad \textit{linealmente estable} \quad (5.38.a)$$

$$\lambda > 1, \quad \textit{inestable} \quad (5.38.b)$$

De la Ec. (5.37) obtenemos información acerca de la convergencia o divergencia de la evolución de fase para cada iteración

$$\Delta_{n+1} = f'(L)\Delta_n = [f'(L)]^2\Delta_{n-1} = \dots = [f'(L)]^n\Delta_0. \quad (5.39)$$

Para el caso linealmente estable $\lambda < 1$, de la Ec. (5.39) obtenemos la siguiente desigualdad,

$$\Delta_0 > \dots > \Delta_{n-1} > \Delta_n > \Delta_{n+1} \quad (5.40.a)$$

$$\Delta_n \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \quad (5.40.b)$$

La cual corresponde con la fase en la vecindad de la región focal.

Un hecho interesante en el análisis de caos son los efectos de bifurcación, estos efectos son presentes en la ecuación logística, para este trabajo analizamos el caso para la primera bifurcación para el caso de atractor que corresponde con dos valores de fase simultáneos para un mismo punto y satisfice la ecuación de segunda iteración

$$\begin{aligned}
0 &= f^2[L] - L = \\
&= r(rL(1 - L))(1 - rL(1 - L)) - L,
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Donde hemos usado la definición dada por Ec. (5.34). La primera igualdad de la Ec. (5.37) es dada por el hecho de que L es un punto fijo y resolviéndola obtenemos las dos raíces que son los puntos fijos de la fase bifurcada

$$L_+ = \frac{(r+1) + \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \tag{5.42.a}$$

$$L_- = \frac{(r+1) - \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}, \tag{5.42.b}$$

Los puntos fijos son obtenidos de las Ecs. (5.42.a) y (5.42.b) satisfacen Ec. (5.41). Del mapeo linealizado Ec. (5.39) tomando la fase inicial L_0 , y la fase adyacente $L_0 + \Delta_0$ la ecuación de eigenvalor λ para el estado bifurcado de dos ciclos

$$\begin{aligned}
\lambda &= f'(L_+)f'(L_-) \\
&= 4 + 2r - r^2 < 1,
\end{aligned} \tag{5.43}$$

La evolución de los puntos fijos está dada de la Ec. (5.33) para el intervalo $1 < r < 3$ y el estado de primera bifurcación ocurre para el intervalo $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ representados en Fig. (5.12).

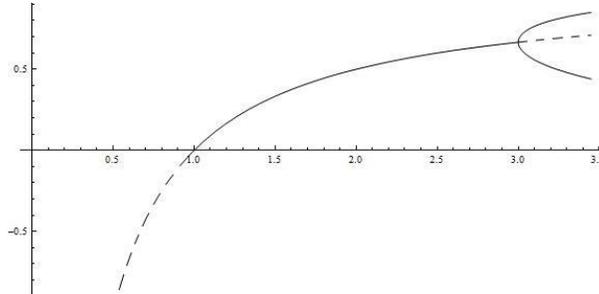


Figure (5.12). Bifurcation behavior of the phase function in the neighborhood of the fixed points.

El análisis de estabilidad para la ecuación logística nos da información interesante acerca de la evolución de fase y de esta, comportamiento interesante puede ser deducido como es mostrado en la siguiente sección [6-9]

5.2.3 Dimensión fractal.

El Sistema bajo estudio consiste en describir el comportamiento de un conjunto de transmitancias y sus correspondientes RF mostradas en Fig. (5.13).

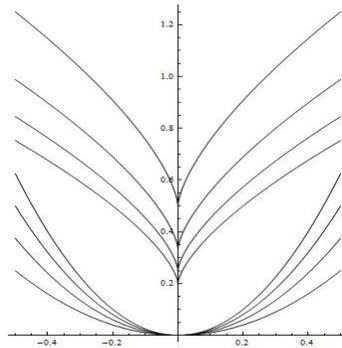


Fig. (5.13) Conjunto de regiones focales y sus correspondientes condiciones de frontera. Las curvas son relacionadas por un factor de escala la envolvente de puntos críticos sigue un comportamiento no-lineal.

El estudio inicia con la descripción de dimensión fractal como sigue. La dimensión fractal es un concepto importante que lleva información acerca de la métrica [69], Para realizar este cálculo comparamos la longitud de arco en la condición de frontera y la longitud de arco de la región focal. Introduciendo el factor de escala h , la dimensión adquiere una representación paramétrica que corresponde con un Sistema multi-fractal. Entonces es natural proponer una definición para la dimensión fractal paramétrica como

$$D(\alpha) = \frac{\ln S(\alpha, h)}{\ln S(x, h)}, \quad (5.44)$$

En donde S es la longitud de arco para un valor de h dado y su correspondiente longitud de arco de la región focal para el mismo parámetro h . De la definición previa, es fácil deducir que el concepto de dimensión fractal contiene información acerca de la compresión del campo óptico, esto puede ser usado para analizar características genéricas de la función de fase.

Cuando la dimensión es constante, que debe ocurrir para el valor mínimo de h , esto significa que el campo óptico no presenta fluctuaciones generando procesos estables, que pueden relacionarse con un diagrama de *tela de araña* Fig. (5.10). La definición de dimensión fractal puede relacionarse con valores de entropía E , dados por

$$D(\alpha) = \frac{S(x,h)E(x,h)}{S(\alpha,h)E(\alpha,h)} = c. \quad (5.45)$$

Esto significa que una relación de balance entre los correspondientes es seguida, lo cual corresponde con la estabilidad del Sistema. En el contexto físico, no se generan fluctuaciones en el índice de refracción efectivo.

5.2.4 Efectos de auto-refracción en regiones focales.

Una consecuencia física de los previos comentarios es que el comportamiento del campo óptico en la vecindad de un punto fijo que consiste en modificar el índice de refracción efectivo. Este efecto genera un comportamiento auto-regulado del campo óptico el cual llamamos auto-refracción. En Fig. (5.14) se muestra este comportamiento

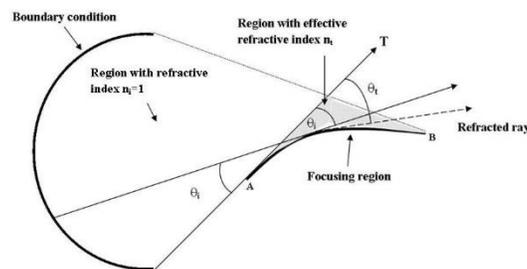


Fig. (5.14) Self-refraction effects in the neighborhood of focusing region, the emerging field from boundary condition is bended toward the focusing region.

Una consecuencia importante de los efectos de compresión es que el índice de refracción efectivo es modificado y este puede adquirir valores en el rango $n_{eff.} \in (0,1]$, esta condición genera nuevas características físicas. Analizamos el Nuevo efecto físico que consiste en el doblamiento del campo óptico hacia la región focal en donde el índice de refracción efectivo tiene un valor mínimo. Esto es explicado aplicando la ley de Snell para el Sistema óptico mostrado en la Fig. (5.14), los ángulos son medidos desde la línea normal a la condición de frontera, la dirección normal a la condición de frontera está en dirección tangente a la RF y esta separa dos medios con diferente índice de refracción efectivo. El primer medio en la trayectoria del rayo propagado tiene un índice de refracción efectivo igual a $n_i = 1$. Cuando estos rayos Cruzan el punto A, estos interactúan con otros rayos y su propagación es equivalente a propagar en un medio con índice de refracción efectivo $n_T < n_i$. Debe ser notado que en esta región la densidad de rayos crece adquiriendo su valor máximo en la vecindad de región focal. De la ley de Snell tenemos que $\sin\theta_T < \sin\theta_i$ ya que $n_T < 1$. El valor límite para el Angulo θ_T ocurre cuando $n_T \rightarrow 0$, esto implica que θ_T adquiere valores complejos, reinterpretamos este hecho como sobre una región focal actuando como sumidero lo cual es consistente con los efectos de auto-refracción.

5.2.5 Conclusiones.

Presentamos un análisis geométrico para la evolución de campos ópticos emergentes de una condición de frontera parametrizada. Cuando se presentan propiedades no-lineales, por ejemplo en la función de curvatura, el campo óptico genera ondas de choque, cuya geometría depende de un parámetro permitiendo la caracterización de la evolución geométrica del campo óptico, esto conduce a establecer una definición natural de dimensión fractal del campo óptico, el significado

físico puede ser asociado con procesos de entropía, responsable de generar efectos de compresión del campo óptico y corrimientos de fase.

El estudio fue implementado usando la ecuación logística con el propósito de realizar un análisis de estabilidad para el índice de refracción efectivo. El Sistema óptico bajo estudio consistió en un campo emergente de un conjunto de condiciones de frontera de tipo parabólico y de sus correspondientes RF, en donde el factor de escala permite la representación paramétrica. Este punto de vista nos permitió comparar la geometría de regiones ópticas en diferentes planos que lleva información acerca de la evolución de la métrica en diferentes regiones. El estudio presentado fue aplicado para identificar nuevos efectos ópticos tales como efectos de auto-refracción. Creemos que este análisis puede ser aplicado para explicar otros importantes efectos tal como las propiedades físicas de haces acelerados y su relación con vórtices ópticos, la física de cargas y corrientes topológicas y su relación con procesos de entropía óptica.

Capítulo 6.

6.1 Conclusiones generales y trabajo a futuro.

En este trabajo se analizaron las propiedades físicas de regiones focales en un campo óptico y su evolución espacial y temporal. Para este estudio se parte de un análisis extremal de las propiedades de campo en donde se da una relación de balance entre la función de amplitud y la función de fase las cuales se deducen de la ecuación de Helmholtz. En este contexto, la función de fase toma gran importancia, ya que mediante la estructura espacial de esta es posible caracterizar también la evolución de un campo óptico y las condiciones bajo las que se presentan regiones focales de campo.

En particular en el capítulo 3 se estudió la evolución espacial de la función de fase, esto implicó describir la evolución del frente de onda en relación con la trayectoria de propagación del campo óptico. Utilizando conceptos de geometría diferencial se aplica de manera natural la clasificación dada por el teorema de Euler, en la cual se caracteriza la dependencia lineal entre las curvas características de la función de fase, de esta clasificación se tiene que una región de tipo parabólico corresponde con la descripción de una región focal. En especial, la independencia lineal de las curvas características de fase deja de ser válida en las regiones focales, esto equivale a un colapso en la estructura lineal de la función de fase, y deja de ser válido el concepto de frente de onda, ya que no hay propiedad física que lo distinga del resto de la descripción de la función de fase, se deduce de un análisis extremal que este último caso corresponde a sistemas donde se involucran procesos no-lineales.

Un resultado importante obtenido del análisis desarrollado en el capítulo 2, es que la descripción de difracción de Fraunhofer corresponde a un campo en una región de tipo parabólico, esto es evidente de la ecuación diferencial para la función de fase, esto equivale a calcular la integral de difracción

tomando con una transmitancia cuyas coordenadas corresponden con las de los centros de curvatura. Otra propiedad importante que se analiza con base a la clasificación dada del teorema de Euler, es que, las regiones de tipo parabólico correspondientes a RF funcionan como regiones en torno a las cuales se organiza el resto del campo óptico, siendo esta una región divisoria entre la región hiperbólica y elíptica del campo óptico. De esta propiedad se tienen presentes procesos de entropía en la función de fase, los cuales son caracterizados por la no unicidad de la función de fase, esto implica efectos de discontinuidad.

Es importante mencionar que la descripción anterior parte de un análisis extremal del campo óptico, en el cual se describen las condiciones en las cuales se tiene la presencia de una RF, y por tanto nos permite entender bajo qué condiciones se puede obtener una síntesis de RF, sin embargo la descripción física del mecanismo mediante el cual son generadas es explicado al analizar la ecuación de onda-difusión. En el capítulo 4, esta ha sido desarrollada de forma detallada en donde se han analizado la estructura de campo dada por soluciones de Green. Obteniendo de lo anterior una expresión genérica del campo óptico junto con una función de relación de dispersión mediante los cuales, se describen las transiciones de comportamiento ondulatorio a difusivos y vice-versa. Teniendo de esta manera que los efectos difusivos son máximos sobre las RF, perdiéndose simultáneamente el comportamiento ondulatorio. Esto implica que el campo óptico exhibe propiedades tipo carga al satisfacer la ecuación de Poisson. De este último análisis se tiene la posibilidad de describir y entender de manera más extensa las propiedades de carga topológica en un campo, asociando estas últimas a la existencia de regiones focales.

Como prototipo se ha desarrollado el análisis de un campo difractado por una condición de frontera de geometría parabólica, esta genera una región focal de tipo cúspide. En este sistema óptico se tienen presentes efectos no-lineales generados por efectos de compresión de fase. Como resultado colectivo de estas no-linealidades dadas a nivel local, se tienen efectos de auto-regulación en la

fase, la evidencia experimental de este fenómeno es explicada por un fenómeno que denominamos efectos de auto-refracción, este análisis es completado cuando se analiza el caso dinámico.

Una vez que se obtuvo la descripción para una condición de frontera parabólica, se estudia la interacción de regiones focales. Para generar estas interacciones se utilizaron dos condiciones de frontera parabólicas, generando con esto dos regiones de tipo Pearcey las cuales presentaron dos tipos de interacción. Se pone especial atención a la generación de un canal de irradiancia entre los puntos cúspides de las RF, siendo este una extensión de las RF, generando de esta manera una reconfiguración en la distribución del campo interferido.

Una descripción general donde son aplicados los resultados anteriores es desarrollada cuando se tiene el caso de un sistema óptico dinámico, en el cual alguna variable es dependiente del tiempo. En la primera parte del capítulo 5 se analiza el caso de interacción de RF en donde el índice de refracción es una función aleatoria dependiente del tiempo. Con esta descripción se tiene como resultado la caracterización del tipo de interacción entre RF, las cuales se distinguen por los signos de curvatura de estas. Un resultado importante de este análisis es la presencia de fenómenos de difusión en la interacción de RF, corroborando los resultados obtenidos en el capítulo 4 para el caso estacionario.

Un resultado importante del análisis desarrollado en el capítulo 4 para la ecuación de onda-difusión, es la presencia de efectos de auto-refracción en regiones singulares, estos son explicados por la influencia máxima de efectos difusivos sobre los efectos de tipo onda, teniendo como resultado que la región singular o focal, presentara propiedades de tipo carga, en particular esta presenta propiedades de sumidero. Este comportamiento es desarrollado en la última parte de este trabajo de tesis analizado en el contexto de análisis de estabilidad, considerando que las propiedades de RF de campo son identificadas como regiones estables de campo. Bajo esta descripción es natural la descripción de efectos de bifurcación y propiedades fractales del campo óptico presentes en los

procesos de compresión, siendo estas últimas propiedades aun no desarrolladas en el campo de la óptica los cuales están asociados con efectos de autor efracción como ya se ha mencionado.

Como prototipo en este análisis se propuso como una primera aproximación que la fase bajo un proceso paulatino de compresión, tiene un comportamiento logístico, caracterizando los efectos-no-lineales involucrados. De las propiedades de estabilidad de la ecuación logística se asocian propiedades de bifurcación en el campo comprimido, en especial estas son exhibidas en la región estable dada por la RF de campo. Por otro lado los efectos de compresión representan una diferencia cualitativa de cobertura en las propiedades métricas del campo en la condición de frontera y en la región focal. Estas propiedades métricas del campo son presentes mediante la fractalidad de campo óptico como resultado de un proceso auto-regulado. Estas propiedades fractales son asociadas con la entropía del campo óptico al considerar que la variedad de estados de un campo es proporcional con la longitud de la RF, en este sentido el sistema óptico presenta una estructura menos organizada que en el caso de un RF con menor longitud, esta medida es normalizada al ser comparada con la métrica del campo en la condición de frontera, esta relación de cobertura es dada por la dimensión fractal.

El análisis desarrollado en este trabajo de tesis se ha realizado teniendo por objetivo caracterizar las propiedades de regiones singulares o regiones focales de campo óptico, siendo estas regiones de organización de campo y mediante las cuales se puede hacer una caracterización topológica del campo. Estas propiedades tienen un fuerte impacto al conectarlas a un contexto dinámico, en particular cuando se hace un análisis de estabilidad, en este contexto las regiones estables son características distintivas de un sistema dinámico y del tipo de no-linealidad involucrada en este.

Los resultados obtenidos en este trabajo de tesis parten y se desarrollan en torno a problemas fundamentales en el campo de la óptica, esto ha implicado considerar en general la descripción del campo óptico como un proceso de balance entre efectos de onda y difusión, estas transiciones son evidentes en las regiones focales. Por otro lado se ha obtenido la aplicación de conceptos de

geometría diferencial, esto implica caracterizar un campo óptico asociado a un sistema mediante sus regiones singulares o RF, esto desarrollado como un proceso análogo en la caracterización dado en Topología.

Se debe hacer notar que uno de los resultados más importantes del análisis anterior es que la descripción de un campo óptico en la región parabólica o RF corresponde con la descripción integral del campo difractado en la región de Fraunhofer, con este resultado es posible hacer una descripción más detallada de la fase asociada a procesos no-lineales de mayor orden presentes en el campo óptico en correspondencia con la descripción dada con teoría de catástrofes.

Estos resultados abren el panorama para el desarrollo de investigación de propiedades de campo tanto en el contexto topológico como de estabilidad, con el objetivo de comprender y sintetizar fenómenos no-lineales tales como bifurcaciones y vorticidad.

Bibliografía.

1. M. V. Berry “Catastrophe optics: Morphologies of caustics and their diffraction patterns” *Progress in optics XVIII* (Northholland 1980).
2. M. V. Berry, “The adiabatic phase and Pancharatnam's phase for polarized light”, *Journal of Modern Optics*, 34(11), 1401-1407 (1987).
3. Y. S. Kivshar and E. A. Ostrovskaya, “Optical Vortices: Folding and twisting waves of light,” *Opt. Photonics News* 12(4), 24–28 (2001).
4. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (7th ed. Cambridge Press, 1999).
5. G. Martinez-Niconoff, S. I. De los Santos Garcia, M. A. Torres Rodriguez, R. Suarez Xique, M. Vargas-Morales, P. Martinez Vara and A. Carbajal-Dominguez, “Topological properties of the interaction between focusing regions kind cusped”, *Optics Express*, Vol. 24 No. 13 (2016).
6. M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems & An introduction to Chaos*, Elsevier USA, 2004.
7. J. Guckenheimer and P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag New York, Applied Mathematical Sciences (1983).
8. S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos With applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Perseus Books Publishing, L. L. C., 1994.
9. E. Infeld, G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, Cambridge University Press (1990).

10. P. Prasad, *Nonlinear Hyperbolic Waves in Multidimensions*, Chapman & Hall/CRC Monographs and surveys in pure and applied Mathematics ; 121, 2001.
11. V. I. Arnold, *Ordinary differential Equations*, MIT Press, Cambridge MA, USA, 1973.
12. P. Martinez-Vara, J. Silva Barranco, S.I. De los Santos G., J. Munoz-Lopez, M. A. Torres-Rodriguez, R. Suarez Xique, and G. Martinez-Niconoff, "Diffraction by three-dimensional slit-shape curves: decomposition in terms of Airy and Pearcey functions", *Opt. Lett.* Vol. 40 No 15 (2015).
13. R. Gilmore, *Catastrophe theory for scientists and engineers*, (Dover publications, 1993).
14. R. Thom, *Estabilidad estructural y morfogénesis*, editorial gedisa, Barcelona España, 1987.
15. M. S. Soskin, V. N. Gorshkov, M. V. Vasnetsov, J. T. Malos, and N. R. Heckenberg, "Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices," *Phys. Rev. A* 56(5), 4064–4075 (1997).
16. G. Martinez-Niconoff, S.I. De los Santos Garcia, J. Silva-Barranco, J.A. Martinez, P. Martinez Vara and J.C. Ramirez San-Juan, "Kinematic of Focusing Regions," *J. Opt.* 16, 085704 (2014).
17. L. Landau, E. Lifshitz, *Curso abreviado de Física Teórica: Libro IMecanica y Elec L. Elsgoltz, Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, Editorial MIR Moscú, 1977.*rodinámica*, Editorial MIR Moscú, 1979.
18. W. Pauli, *Pauli Lectures on Physics: Vol. 2 Optics and Theory of electrons*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1973.
19. L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, Editorial MIR Moscú, 1977.
20. I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
21. V. I. Smirnov, *A Course of Higher Mathematics Vol. II*, PERGAMON PRESS LTD, 1964.

22. V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York Inc., (1989).
23. A. V. Pogorelov, *Geometría diferencial*, Editorial MIR Moscú, 1977.
24. C. E. Weatherburn, *Differential Geometry*, Cambridge at the University Press, 1927.
25. T. Levi-Civita, *The absolute differential calculus*, Dover Publications, inc., New York, 1926.
26. G. Martínez-Niconoff, J. Carranza, and A. C. Rodriguez, “Caustics of diffraction fields,” *Opt. Commun.* 114(34), 194–198 (1995).
27. S. M. Baumann, D. M. Kalb, L. H. MacMillan, and E. J. Galvez, *Opt. Express* 17, 12 (2009).
28. A. M. Yao and M. J. Padgett, *Adv. Opt. Photon.* 3, 161 (2011).
29. G. Martínez-Niconoff, J. Muñoz-Lopez, J. Silva-Barranco, A. Carbajal-Domínguez, and P. Martínez-Vara, “Selffocusing transmittances,” *Opt. Lett.* 37(11), 2121–2123 (2012).
30. E. Brasselet, G. Gervinskas, G. Seniutinas, and S. Juodkasis, *Phys. Rev. Lett.* 111, 193901 (2013).
31. D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry* (Dover, 1988), p. 23.
32. J. Durnin, *J. Opt. Soc. Am. A.* 4, 651 (1987).
33. V. I. Arnold, *Singularities of Caustics and Wave Fronts* (Kluwer Academic, 1990).
34. J. B. Keller, *J. Opt. Soc. Am.* 52, 2 (1962).
35. E. J. Beltrami, *Mathematics for Dynamic Modeling*, 2nd ed. (Academic, 1987), p. 171. 15.
36. D. R. Mason, S. G. Menabde, S. Yu, and N. Park, *Sci. Rep.* 4, 4536 (2014).
37. C.K.R.T. Jones, T. Kupper and K. Schaffner, Bifurcation of asymmetric solution in nonlinear optical media, *Math. Phys.* 52, 859-880 (2001).
38. M. Nikkhou, M. Škarabot, S. Čopar, M. Ravnik, S. Žumer and I. Muševič, Light-controlled topological charge in a nematic liquid crystal. *Nature Physics*, Volume 11, (2015).

39. P. Vaity and R. P. Singh, Topological charge dependent propagation of optical vortices under quadratic phase transformation. *Opt. Lett.* 37(8), 1301-1303 (2012).
40. S. Feng and H. G. Winful, Physical origin of the Gouy phase shift. *Opt. Lett.* 26(8), 485-487 (2001).
41. V. Y. Osipov, Diffraction catastrophe in the focusing region of an aberrated laser beam and associated optical vortices. *Journal of optical technology c/c of opticheskii zhurnal*, 66(12), 1035-1037 (1999).
42. M. J. Padgett, J. Molloy and D. McGloin, *Optical Tweezers: methods and applications*, CRC Press. (Eds.). (2010).
43. T. Li, *Physical Principle of Optical Tweezers. In Fundamental Tests of Physics with Optically Trapped Microspheres* (pp. 9-20). Springer New York. (2013).
44. J. M. Hollas, *Modern spectroscopy*. John Wiley & Sons. (2004).
45. R. Aroca, *Surface-Enhancement vibrational Spectroscopy*, John Wiley and Sons, (2006).
46. J. Uozumi and T. Asakura, Optical fractals, *Optical engineering-new york-marcel dekker incorporated-*, 54, 283-320 (1996).
47. B. G. Streetman *Solid state electronic devices* (Prentice Hall Series in solid state physical electronics, 1980).
48. G. Martinez Niconoff, J. Carranza Gallardo, A. Cornejo Rodriguez and E. Ley Koo, "Design of projective and their focusing properties," *Opt. Lett.* 22 (1997).
49. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998).
50. P. R. Garabedian *Partial differential equations* (John Wiley and Sons, 1964).
51. R. Wojnar, Random walk, diffusion and wave equation, *Acta physica Polonica B*, No 5 Vol. 44 (2013) .

52. A. Mandelis, *Diffusion-Wave Fields: Mathematical Methods and Green Functions*, Springer-Verlag, (2001).
53. I. D. Chremmos and N.K. Efremidis, “Non paraxial accelerating Bessel like beams,” *Phys. Rev. A.* 88, 063816 (2013).
54. G.A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu and D.N. Christodoulides, “Observation of accelerating beams,” *Phys Rev.Lett.*99, 213901 (2007).
55. J. F. Nye, *Natural Focusing and Fine Structure of Light* (IOP Publishing, 1999).
56. M. R. Dennis, K. O’Holleran, and M. J. Padgett, “Singular optics: optical vortices and polarization singularities,” *Progress in Optics* Vol. 53, E. Wolf, ed. (Amsterdam-Elsevier, 2009).
57. A. M. Amaral, E. L. Falcão-Filho, and C. B. de Araújo, “Characterization of topological charge and orbital angular momentum of shaped optical vortices,” *Opt. Express* 22(24), 30315–30324 (2014).
58. J. D. Ring, J. Lindberg, A. Mourka, M. Mazilu, K. Dholakia, and M. R. Dennis, “Auto-focusing and self-healing of Pearcey Beams,” *Opt. Express* 20(17), 18955–18966 (2012).
59. C. Dorrer and J. D. Zuegel, “Optical testing using the transport-of-intensity equation,” *Opt. Express* 15(12), 7165–7175 (2007).
60. W. C. Graustein 2006 *Differential Geometry* (New York: Dover) pp 79–103
61. D. P. Rhodes, G. P. T. Lancaster, J. Lancaster, D. Mcgloin, J. Arlt and K. Dholakia *Opt. Commun.* 214 247–54 (2002).
62. Y. S. Kivshar and D. E Pelinovsky. *Phys. Rep.* 331 117–95 (2000).
63. Martínez-Niconoff G, Mendez E, Martínez Vara P and Carbajal Dominguez A *Opt. Commun.* 239 259–63 (2004).
64. Basistiy I V, Bazhenov V Y, Soskin M S and Vasnetsov M V *Opt. Comm.* 103 422–8
65. Teague M R 1982 *J. Opt. Soc. Am.* 72 1199–209 (1993).
66. Streibl N *Opt Commun.* 49 6–10 (1984).

67. Hoel H, Port S C and Stone C J *Introduction to Stochastic Processes* (Boston: Houghton Mifflin Co.) (1972).
68. Wasserman L *All of Statistics* (Berlin: Springer) (2004).
69. K. Falconer, *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley and Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex England, 2003.