



**INAOE**

## **Transiciones de fase en el modelo LMG-Dicke**

Por

**Raúl Amaury Robles Robles**

Lic. en Física Aplicada, BUAP

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias en la especialidad en Óptica**

en el

Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica

Julio 2015

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

**Dr. Blas Manuel Rodríguez Lara**

Investigador titular del INAOE

©INAOE 2015

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes mencionando la fuente.





# Abstract

We study the ground state of a finite size ensemble of interacting qubits driven by a quantum field. The basal state exhibits a series of quantum phase transition. For low interaction the atoms and field are in the ground state, for a certain region with critical interaction value the atomic ensemble is found to be in a maximal entangled  $W$  state, the area of this region decrees as the number of atoms increases, in the classical limits becomes the line in the parameter space that defines the phase transition.



# Resumen

Se estudia el estado base de un ensamble finito de qubits que interaccionan entre si y con un campo cuántico. El estado basal presenta una serie de fases que cambian abruptamente. Para interacciones débiles los átomos y el campo se encuentran en el estado base. Para una cierta región, con una interacción crítica, el ensamble atómico se encuentra en un estado  $W$ , máximamente enredado. El área de esta región disminuye al aumentar el número de átomos. En el límite clásico se vuelve la línea en el espacio de parámetros que define la transición de fase.



# Índice general

<b>1. Transiciones de fase</b>	<b>1</b>
1.1. Transiciones de fase en modelos de interacción átomos campo . . . . .	3
1.2. Transiciones de fase en el estado base . . . . .	6
<b>2. Transiciones de fase en el modelo Dicke-LMG</b>	<b>9</b>
2.1. Estado base bajo la aproximación de onda rotante . . . . .	9
2.2. Estado base en el modelo LMG . . . . .	12
2.3. Estado base para pequeños acoplamientos . . . . .	12
2.4. Estado base en el modelo semiclásico . . . . .	13
2.5. Solución numérica en el modelo de LMG-TC . . . . .	14
2.6. Solución numérica en el modelo general . . . . .	15
<b>3. Conclusión</b>	<b>19</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>21</b>
A.1. Resultados de la tesis aceptados en publicaciones internacionales . . . .	24





# Capítulo 1

## Transiciones de fase

Por naturaleza un sistema aislado tiende a estar en el estado de mínima energía, si el sistema está compuesto por dos o más subsistemas y existe interacción entre ellos, en el estado base del sistema completo puede suceder que los subsistemas estén excitados, esto es posible únicamente si existe interacción entre ellos.

Consideremos, por ejemplo, al sistema cuántico más sencillo, un qubit, un sistema con solo dos estados posibles, uno base, representado por  $|g\rangle$  y otro excitado,  $|e\rangle$ . Un qubit, puede representar una variedad de sistemas físicos, por ejemplo, dos niveles de excitación de un electrón en un átomo o el *spin* asociado a un momento dipolar. En estos casos entre dos qubits puede existir una interacción. La energía de un sistema aislado formado por dos qubits consta de la energía individual de cada uno de los qubits más un término de interacción, que puede ser dipolar, con energía nula si tienen alineación contraria o máxima cuando tienen la misma dirección. Si la interacción es débil el estado base tiene a los dos qubits en su mínima energía  $|g\rangle_1|g\rangle_2$ , donde los subíndices indican al qubit. Cuando la interacción aumenta, la energía del estado  $|g\rangle_1|g\rangle_2$  aumenta, en ese caso pueden existir estados con energía total menor y el estado base del sistema completo cambia.

En general, para cualquier sistema al valor donde ocurre un cambio abrupto en el estado de mínima energía le llamaremos punto crítico y diremos que existe una transición de fase en el estado base. El término fase denotará a la región donde los parámetros del sistema hacen que el estado sea constante.

Existe una analogía macroscópica que puede ayudar a hacer una imagen mental, pensemos en dos brújulas, es decir dos dipolos inmersos en un campo magnético uniforme. Si se encuentran separados, la interacción es nula y ambas apuntan al norte que es el estado de mínima energía. Al acercar las dos brújulas, el campo producido por los dipolos aumenta en la posición de la otra y puede llegar a ser comparable al campo homogéneo, ésto hará que, poco a poco, dejen de apuntar al norte. A pesar de que las brújulas no están en su estado de mínima energía respecto al campo homogéneo, el sistema completo lo estará. En este caso el cambio es suave y no existe un punto crítico a diferencia de la versión cuántica.

El problema desde un punto de vista microscópico tiene otra propiedad interesante. Los qubits son idénticos y no podemos distinguir uno de otro, por lo que se requiere un estado que sea simétrico, invariante ante un cambio de un qubit por otro. Este tipo de base fue introducida por Dicke [1], para  $N$  qubits. Dicke introdujo esta base

para generalizar resultados de un sistema de radiadores con una transición dipolar, eléctrica o magnética, y ver lo efectos de usar un tratamiento cuántico. Una propiedad importante es que al considerar a los operadores asociados a cada qubit, es decir las matrices de Pauli de cada uno, colectivamente tienen las mismas propiedades que los operadores de momento angular cuántico. En el caso límite, una infinidad de qubits tienden a comportarse de forma idéntica a un dipolo clásico en un campo constante y homogéneo. Ésto sucede independientemente de la naturaleza del qubit, por ejemplo, un átomo de dos niveles .

Conviene recalcar que el comportamiento colectivo es consecuencia de la simetría necesaria para describir a los subsistemas que son indistinguibles. Ésto no se ve reflejado en la energía del sistema a diferencia de la interacción dipolar; lo cual, por ser en general débil no fue considerado en el trabajo de Dicke. Por otro lado un Hamiltoniano que considera la interacción dipolar de un ensamble de qubits fue propuesto por Lipkin, Glick y Meshkov [2], como un modelo sencillo para estudiar diferentes formas de resolver un problema.

Dicke, en su trabajo original, encontró que existen estados que tienen coeficiente de emisión más grande que lo esperado. A estos estados los denomino fase superradiante, ya que la tasa de emisión es proporcional al cuadrado del número de átomos, distinguiéndola de una fase normal donde la emisión es proporcional al número de átomos.

Se ha discutido la existencia de transiciones de fase en este sistema. Por lo que conviene describir en general que implica una transición de fase. Una transición de fase es un cambio abrupto en las propiedades físicas de un sistema al cambiar una variable, un ejemplo cotidiano es la condensación que depende de la presión y la temperatura. Ésto es una transición de fase termodinámica. En modelos netamente cuánticos se considera que están a cero grados, por lo que transiciones de fase térmicas no existen. A esta temperatura existen transiciones de fase cuánticas (QPT) que dependen de los parámetros del sistema. En el presente trabajo sólo consideraremos transiciones de fase cuánticas en el estado base (GSPT).

La importancia de las transiciones de fase radica en que, de poder ser verificadas experimentalmente, validan el modelo. Por ejemplo, históricamente, en la descripción termodinámica de un gas se encontró que en ciertos casos puede ser descrito por la ecuación de los gases ideales. Sin embargo, este modelo no contiene ningún indicio de un transición de fase. Una generalización del gas ideal es la ecuación de Van der Waals que puede explicar la transición de fase al incluir un término cuadrático. Con la descripción de la interacción de átomos con un campo ha sucedido un debate similar, se ha discutido que la existencia de QPT es debida a las aproximaciones del modelo o si existen realmente. Sin embargo, no se han tenido forma de comprobar la existencia de transiciones de fase experimentalmente en modelos de interacción átomo campo. Por lo que ha sido una discusión abierta.

En este trabajo consideraremos un modelo que describe un conjunto de qubits que interaccionan entre sí y con un campo cuántico. El estado base del sistema dependerá de la intensidad de la interacción átomo-átomo y de la interacción de los átomos con el campo. Las dos partes de este modelo han sido estudiadas por separado con cierta profundidad, ambas partes presentan una transiciones de fase. En esta tesis nos centraremos en estudiar los cambios en el estado base en el modelo completo.

En las siguiente sección presentamos brevemente la discusión histórica sobre la ex-

istencia de las transiciones de fase en los modelos de interacción luz-átomos. En 1.2 nos centraremos en las transiciones en el estado base.

## 1.1. Transiciones de fase en modelos de interacción átomos campo

El Hamiltoniano de interacción de un conjunto de átomos que interaccionan entre sí y con un campo cuántico, en la norma Gaussiana, es

$$\begin{aligned} \hat{H}_{a-c} = & \sum_{i=1}^{N_a} \left\{ \frac{1}{2m_i} (p_i - \frac{e}{c} A(x_i))^2 + V_i(x_i) \right\} \\ & + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{i < j}^{N_a} V_{ij}(x_i - x_j), \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde  $A$  es el potencial vectorial;  $a$  y  $a^\dagger$  son los operadores usuales de aniquilación y creación;  $m_i$ ,  $x_i$  y  $p_i$  son la masa, posición y momento del  $i$ -ésimo átomo;  $V_i$  es el potencial producido por cada átomo; el último término es la suma de las interacciones uno a uno de todos los átomos.

Este Hamiltoniano es extremadamente complicado, considerar la posición de cada átomo se vuelve impráctico tratándose de un gas, una representación de esta interacción fue propuesta por Dicke [1] en 1954, él describió el problema usando lo que ahora se conoce como el Hamiltoniano de Dicke (HD)

$$\hat{H}_D = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{J}_z + \frac{\lambda}{\sqrt{N_a}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{J}_x, \quad (1.2)$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia del láser,  $\omega_a$  es la energía de transición del átomo los operadores de creación y aniquilación son  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$ ,  $\lambda$  es el coeficiente de acoplamiento entre el ensamble de átomos y el campo cuántico,  $N_a$  es el número de átomos, los operadores  $\hat{J}_{x,y,z,\pm}$  son los operadores de momento que operan sobre los átomos de una forma colectiva. Las suposiciones necesarias para proponer a (1.2) son:

1. Sólo existe un modo dentro de la cavidad.
2. los átomos sólo tienen dos niveles energéticos.
3. La aproximación de onda larga. El campo no cambia significativamente, es el mismo para todos los átomos.
4. Los términos cuadráticos de  $A$  son despreciables,
5. La interacción interatómica es débil y puede ser despreciada.

Estas aproximaciones hacen al problema manejable, sin embargo imponen una serie de condiciones, para que sean realizables experimentalmente; se requiere una cavidad óptica perfecta; seleccionar las transiciones electrónicas de tal forma que sólo se tengan dos niveles de energía por átomo; la aproximación de onda larga implica que la región

donde están confinados los átomos sea pequeña comparada con la longitud de onda del campo.

Usando estas aproximaciones, Dicke encontró que si el estado cuenta con la mitad de los átomos excitados el gas presenta un coeficiente de radiación espontánea proporcional al cuadrado del número de partículas y no una relación lineal que se espera clásicamente, por tal motivo la llamo fase “super-radiante”. Esta fase es resultado de un comportamiento colectivo de los átomos.

Pese a que el modelo es una simplificación del problema, el modelo de Dicke aún no ha sido resuelto completamente. Una modelo sobre-simplificado que puede ser resuelto de forma analítica fue hecha por E. T. Jaynes y F. W. Cummings en 1963 [3], ellos consideraron un solo átomo de dos niveles, interactuando con un modo cuantizado de una cavidad óptica, al igual que Dicke, sin embargo emplean una aproximación de onda rotante.

$$\hat{H}_{JC} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{\sigma}_z + \gamma (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-). \quad (1.3)$$

la energía del átomo es representado por las matrices de Pauli  $\sigma_{x,y,z,\pm}$ ,  $\gamma$  es el coeficiente de acoplamiento. Este modelo es bastante útil didácticamente y por su riqueza matemática ya que puede ser resuelto fácilmente, a este Hamiltoniano ahora se le conoce como Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (HJC).

En la práctica, es extremadamente difícil aislar un sólo átomo por lo que es necesario describir la interacción del campo con un conjunto de átomos que se comportan de forma colectiva. La interacción del campo cuantizado con un ensamble de átomos fue descrita por M. Tavis y F. W. Cummings en 1968 [4], este modelo ahora se conoce como Hamiltoniano de Tavis-Cummings (HTC),

$$\hat{H}_{TC} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{J}_z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-). \quad (1.4)$$

El cual es una aproximación de HD donde se ha supuesto la aproximación de onda rotante RWA, este modelo puede ser resuelto analíticamente ya que el Hamiltoniano conmuta con el número de excitaciones, a diferencia de  $\hat{H}_D$  que solamente conmuta con la pariedad.

K. Hepp y E. H. Lieb en 1973 [5] mostraron que en el límite termodinámico y para acoplamientos grandes el sistema (HTC) exhibe una transición de fase de segundo orden de normal a super-radiante para una temperatura crítica, en la cual todos los estados relevantes son super-radiantes, usando un método basado en estados coherentes Wang y Hioe (1973) [6] encontraron el mismo resultado. Ambos resultados tratan acoplamientos grandes sin embargo el modelo que emplearon fue el modelo de Tavis-Cummings que implica la aproximación de onda rotante.

Carmichel, Gardiner y Walls siguiendo el procedimiento de Wang y Hioe pero empleando el modelo completo eq.(1.2) encuentran que la transición de fase existe pero es modificada al incluir los términos contrarotantes [7]. En 1975 un resultado controversial fue presentado por Rzażewski, Wódkiewicz, y Żakowicz [8]. Quienes también siguiendo el procedimiento de Wang e Hioe, pero incluyendo los términos cuadráticos de  $A$ , es decir para el Hamiltoniano

$$\hat{H}_{D+A^2} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{J}_z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{J}_x + \kappa (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2, \quad (1.5)$$

encontraron que existe una contradicción en la existencia de la fase superradiante, limitado por la regla de la suma de Thomas-Reiche-Kuhn del átomo (“Thomas-Reiche-Kuhn (TRK) *sum rule for that atom*”) como consecuencia de esto afirmaron que la existencia de esta transición de fase es meramente resultado de las aproximaciones en el modelo de Dicke, además demostraron que este resultado es válido usando y sin usar aproximación de onda rotante.

En años posteriores Orzsag [9] usando métodos diferentes encontró que en el límite termodinámico, es decir cuando el número de átomos tiende a infinito, no existen problemas ya que los términos de  $A^2$  contribuyen con  $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(N)/N \rightarrow 0$ , lo cual puede considerarse cierto ya que el número de átomos en un gas es extremadamente grande, sin embargo existe un compromiso entre el número de átomos y la existencia de este tipo de fase.

El modelo de Dicke requiere que sea un gas de baja densidad con el fin que no exista superposición de las funciones de onda de los átomos, sin embargo éstos deben estar cerca unos de otros con el fin de poder usar la aproximación de onda larga para el campo, esto es posible para longitudes de onda grandes como microondas, otra aproximación que requiere es que el átomo sólo tenga dos niveles lo cual en general no es posible, pero se puede lograr mediante un átomo de Rydberg en el cual existe un electrón con un número cuántico principal grande, los demás electrones apantallan el campo del núcleo creando un potencial equivalente a un átomo de hidrógeno. En general es muy complicada la realización experimental de este modelo tal como fue propuesto por Dicke. En los últimos años se ha encontrado una relación entre el modelo de Dicke con un condensado Bose-Einstein dentro de una cavidad donde se incide un láser de bombeo de forma perpendicular a la cavidad [10, 11], el condensado a cierta potencia particular del bombeo exhibe un auto-ordenamiento en la estructura el cual es equivalente a la transición de fase de un estado normal a uno superradiante en el modelo de Dicke. Dicha transición se ha observado experimentalmente por Baumann y colaboradores [12, 13].

## 1.2. Transiciones de fase en el estado base

Recientemente ha surgido interés en transiciones de fase en el estado base en modelos de interacción átomo-campo, se ha demostrado que permiten una vía para producir enredamiento [14–19], en este sentido, se han realizado varios trabajos, incluyendo varios modelos por ejemplo, las propiedades de enredamiento de las fases en el modelo de Dicke fueron estudiadas por Lambert *et al.* [14], encontraron que la entropía y la concurrencia son valores que cambian como función del coeficiente de acoplamiento, la transición es suave para un número finito de qubits y se vuelve abrupta cuando éstos tienden a infinito. Bužek *et al.* encontraron que el modelo de Tavis-Cummings presenta una serie infinita de transiciones de fase [16].

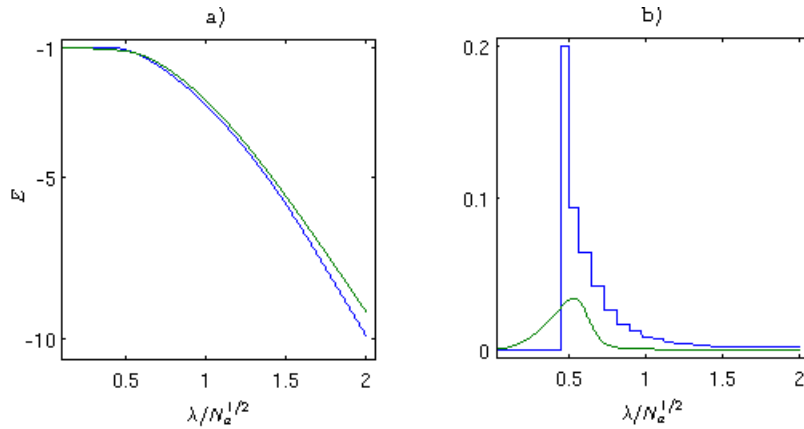


Figura 1.1: a) Energía en el estado base HTC azul y HD en verde, b) concurrencia en el estado base para el mismo caso, se ha considerado un sistema en resonancia ( $\omega_a = \omega_c$ ) y 5 átomos.

Estas transiciones en el estado base (GSPT) se encuentran calculando el eigenestado con menor energía del Hamiltoniano como función de un parámetro, en este caso el coeficiente de acoplamiento entre fotones y átomos. En la figura 1.2 a) se muestra una gráfica para la energía del estado base como función del acoplamiento para un ensamble de cinco átomos para el Hamiltoniano de Tavis Cummings en azul y el modelo de Dicke en verde, existe un valor del acoplamiento en el cual cambia la pendiente en este punto tenemos una transición de fase. Para los mismos casos, en b) se gráfica la concurrencia en el estado base, que es una medida del enredamiento de los átomos, en dicha gráfica se observa claramente las transiciones que ocurren en el modelo de Tavis-Cummings y en el modelo de Dicke existe una región donde la concurrencia aumenta.

Al incluir al término  $\kappa A^2$  la transición de fase se mantiene [20], pero esta vez se genera un “mapa” ya que la transición depende de los valores de  $\kappa$  y  $\lambda$

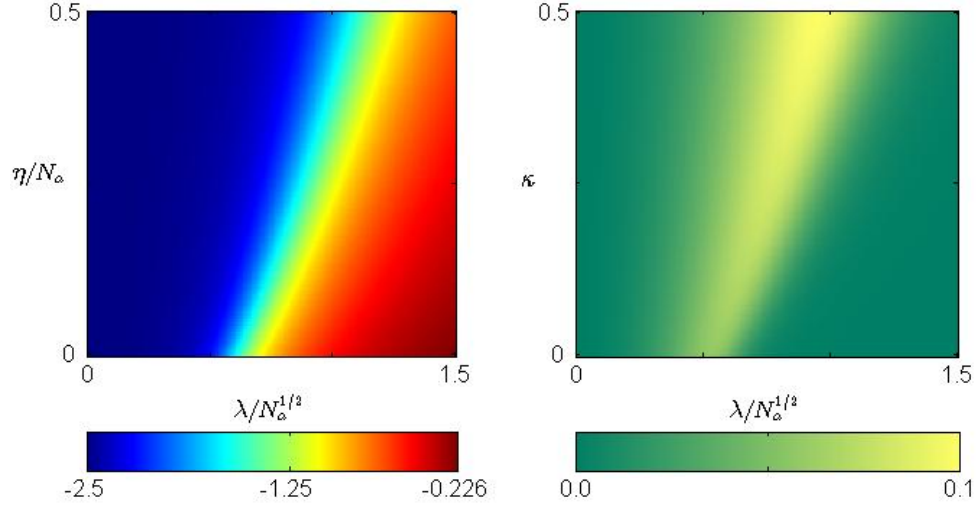


Figura 1.2: a) valor esperado de  $J_z$  en el estado base como función, b) concurrencia en el estado base como función de los parámetros del Hamiltoniano 1.5. El valor de la concurrencia cae dentro de un tres fases, siendo máxima en la fase central.

Otra generalización natural del modelo de Dicke consiste en incluir la interacción interatómica, el modelo, en ausencia del campo, fue estudiada por Lipkin, Meshkov y Glick, [2], Hamiltoniano es interesante ya que en si mismo presenta transiciones de fase en el estado base y además, éstos presentan enredamiento en los átomos [21].

En este trabajo de investigación estudiaremos las transiciones de fase en el estado base de esta generalización particular incluyendo interacción átomo-átomo y luz-átomo, para esto consideraremos interacción dipolar de la forma

$$\frac{1}{2} \left( \hat{J}_+ \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+ \right),$$

con la finalidad de simplificar hacemos uso que  $\hat{J}^2$  es una cantidad conservada y que

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_z^2 + \frac{1}{2} \left( \hat{J}_+ \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+ \right), \quad (1.6)$$

el hamiltoniano resultante que incluye la interacción, salvo una constante es,

$$\hat{H} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{J}_z + \tilde{\eta} \hat{J}_z^2 + \tilde{\lambda} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{J}_x \quad (1.7)$$

Es idéntico al Hamiltoniano 1.2 pero se ha añadido la interacción átomo-átomo  $\tilde{\eta} \hat{J}_z^2$ , donde  $\tilde{\eta} = \eta/N_a$  es el coeficiente de acoplamiento interatómico.





# Capítulo 2

## Transiciones de fase en el modelo Dicke-LMG

En este capítulo se exploran las transiciones de fase que existen en el Hamiltoniano 1.7. Para ello se ataca el problema en diferentes regímenes. Primeramente, las transiciones son encontradas analíticamente para pequeños acoplamientos y cerca de resonancia, usando la aproximación de onda rotante. Para el caso extremo donde no existe acoplamiento luz-átomo, se encuentran de forma exacta las transiciones de fase. Para acoplamientos inter-atómicos y átomo-campo pequeños encontramos que la transición de fase perdura ya que el Hamiltoniano es equivalente a uno con RWA. Para un número grande de átomos, usando un análisis semiclásico, también es encontrada la transición de fase. Finalmente, el estado base es encontrado de forma numérica sin el uso de aproximaciones, para un región general. -

### 2.1. Estado base bajo la aproximación de onda rotante

Es posible encontrar analíticamente los estados propios del Hamiltoniano 1.7 bajo la aproximación de onda rotante (RWA). En esta aproximación el Hamiltoniano se escribe

$$\hat{H}_{RWA} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{J}_z + \tilde{\eta} \hat{J}_z^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \hat{a} \hat{J}_+). \quad (2.1)$$

Esta aproximación es válida para valores donde las frecuencias de los átomos y del campo son cercanas. En este caso, los términos que oscilan a frecuencias  $\omega_c + \omega_a$  varían muy rápido, respecto a los que tienen frecuencias  $\omega_c - \omega_a$ , esto nos permite ignorar los primeros.

Debido a que este Hamiltoniano satisface una relación de conmutación con el número de excitaciones,  $[\hat{H}_{RWA}, \hat{N}] = 0$ , tiene la ventaja de que el número de excitaciones es conservado. Lo que permite usar una base común y partir el espacio de Hilbert en subespacios. Cada uno caracterizado por un número de excitaciones y con una base de

dimensión  $\langle \hat{\Lambda} \rangle + 1$ . Por ejemplo, las bases de los primeros subespacios son

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Lambda} \rangle = 0: & \quad \{|0\rangle|j, -j\rangle\} \\ \langle \hat{\Lambda} \rangle = 1: & \quad \{|1\rangle|j, -j\rangle, |0\rangle|j, -j+1\rangle\} \\ \langle \hat{\Lambda} \rangle = 2: & \quad \{|2\rangle|j, -j\rangle, |1\rangle|j, -j+1\rangle, |0\rangle|j, -j+2\rangle\} \\ & \dots \end{aligned}$$

La dinámica de cada subespacio puede ser descrita por un Hamiltoniano expresado como una matriz cuadrada de dimensión  $\langle \hat{\Lambda} \rangle + 1$ , formada por

$$H^{(n)} = H_0^{(n)} + H_I^{(n)}$$

. Los Elementos de estas matrices son de la forma

$$H_0^{(n)} = \omega_c \left( n - \frac{N_a}{2} \right) \mathbf{1}_{\tilde{n}},$$

$$\left( H_I^{(n)} \right)_{i,j} = \delta_{i,j} d_i + \frac{\lambda}{2\sqrt{N_a}} (\delta_{i,j-1} o_j + \delta_{i,j+1} o_{j+1}).$$

Donde los subíndices están en el rango  $i, j = \tilde{n}, \tilde{n} + 1, \dots, n$  y  $\tilde{n} = \max(0, n - N_a)$ , para el número de fotones  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Los términos en la diagonal principal y diagonales adyacentes son

$$\begin{aligned} d_j &= \left( n - j - \frac{N_a}{2} \right) \left[ \omega_a + \frac{\eta}{N_a} \left( n - j - \frac{N_a}{2} \right) \right], \\ o_j &= \sqrt{j(N_a + j - n)(n - j + 1)}. \end{aligned}$$

Los eigenestados de las matrices asociadas a cada subespacio se pueden encontrar por métodos usuales.

Para la primer matriz, el estado base del subespacio con  $\langle \hat{\Lambda} \rangle = 0$  excitaciones es solamente:

$$|\psi_g^{(0)}\rangle = |0\rangle|j, -j\rangle, \quad (2.2)$$

con energía  $E_g^{(0)} = -\omega_a(Na/2) + \tilde{\eta}(Na/2)^2$ . El subespacio con una excitación tiene energía del estado base de la forma

$$E_g^{(1)} = \frac{1}{2} \left( A + B - \sqrt{(A - B)^2 - 4\tilde{\lambda}^2 N_a} \right) m,$$

donde  $A = \omega_c - \omega_a Na/2 + \tilde{\eta} Na^2/4$  y  $B = -\omega_a(N_a/2 - 1) + \tilde{\eta}(N_a/2 - 1)^2$ . El estado basal de este subespacio es una combinación lineal de los estados de la base,

$$|\psi_g^{(1)}\rangle = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 1}} |1\rangle|j, -j\rangle + \frac{1}{\sqrt{h^2 + 1}} |0\rangle|j, -j+1\rangle \quad (2.3)$$

con

$$h = \frac{\omega_a - \omega_c - \eta(1 - 1/N_a) - \sqrt{\omega_a - \omega_c + \eta(1 - 1/N_a)^2}}{\lambda}$$

En la figuras 2.1(a) y 2.1(b) se muestran las fases para 5 y 20 átomos, con azul la fase el el estado base tiene cero excitaciones, a medida que  $\lambda$  y  $\eta$  aumenta se tiene que subespacios más excitados dominan el estado base.

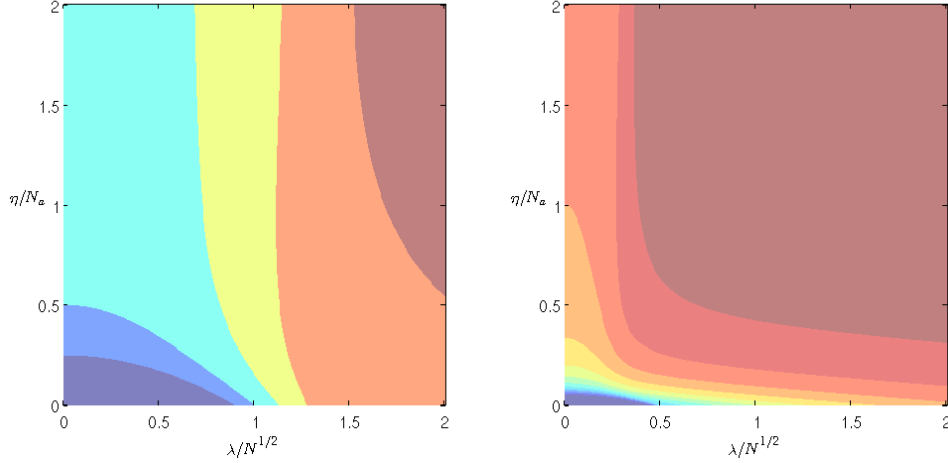


Figura 2.1: Repartición del Estado Base en el modelo de Tavis-Cummings como función de los parámetros del modelo, para  $\omega_c = \omega_a = 1$  y  $N_a = 5$  en la izquierda y  $N_a = 20$  a la derecha. En azul oscuro la región donde el estado base está en el subespacio correspondiente a ninguna excitación. En colores más cálidos estará en subespacios con más excitaciones

El estado base del Hamiltoniano 2.1 es el de menor energía de todos los subespacios. Una transición de fase ocurre cuando la energía del estado base coincide con la de algún subespacios contiguos. La primera de las cuales ocurre cuando  $E_g^{(0)} = E_g^{(1)}$  esto sucede en el acoplamiento crítico

$$\lambda_{c1} = 2\sqrt{\omega_c(\omega_a - \eta(1 - 1/N_a))}, \quad (2.4)$$

esta ecuación corresponde al primer cambio de fase en la figura 2.1(a) y 2.1(b). En esta transición de fase el estado base pasa de un estado puro ec. (2.2), a un estado ec. (2.3) que, dependiendo del valor de  $h$ , puede estar en un estado formado por un fotón y todos los átomos en el estado base ( $|j, -j\rangle$ ) si  $h \rightarrow \infty$ ; un estado con cero fotones y una excitación distribuida entre los átomos ( $|j, 1 - j\rangle$ ) cuando  $h = 0$ ; o una combinación de estos dos estados, para cualquier otro valor de  $h$ , en este caso existe enredamiento entre el campo y los átomos, siendo máximo para  $h = 1$ . Otro tipo de enredamiento ocurre en el estado atómico, el estado del ensamble atómico  $|j, 1 - j\rangle$  tiene a todos los átomos menos uno en el estado base, en este caso el estado está en un estado  $W$  máximamente enredado.

Para los demás subespacios, también es posible encontrar sus estados base. Ya que, es posible encontrar sus estados propios, al resolver su ecuación característica, la cual, será de dimensión  $\langle \hat{\Lambda} \rangle + 1$ . Al comparar las energías basales de espacio contiguos es posible encontrar una serie de  $N_a$  transiciones de fase.

## 2.2. Estado base en el modelo LMG

En el límite donde  $\lambda = 0$  al Hamiltoniano 1.7 se le conoce como modelo de LMG. Es una aproximación sobre-simplificada ya que no existe interacción de la luz con los átomos. Conocer lo que sucede en esta situación es útil para entender lo que sucede en el régimen de acoplamiento débil. El Hamiltoniano en este se reduce a

$$\hat{H}_{LMG} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{J}_z + \tilde{\eta} \hat{J}_z^2, \quad (2.5)$$

como  $\hat{J}_z$ ,  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\hat{H}_{LMG}$  conmutan entre si, los eigenestados son de la forma  $|n\rangle|j, m\rangle$ . El estado de menor energía tiene  $|n = 0\rangle$  en el campo, estos estados tienen una energía

$$E_m = \omega_a m + \tilde{\eta} m^2. \quad (2.6)$$

La intersección para dos valores contiguos de  $m$  se obtienen igualando los valores de las energías, esto ocurre para

$$\tilde{\eta} = \frac{-\omega_a}{2m + 1}. \quad (2.7)$$

Dado que  $m = -j, 1 - j, 2 - j \dots j - 1, j$  y  $\tilde{\eta}$  es positivo, sólo tienen sentido valores de  $m$  que lo hagan positivo. Ésto implica la existencia de  $[j]$  (parte entera) transiciones de fase, ubicadas entre  $\tilde{\eta} = \omega_a/2j$  hasta  $\tilde{\eta} = \omega_a$  para  $N_a$  par y  $\tilde{\eta} = \omega_a/2$  para  $N_a$  impar.

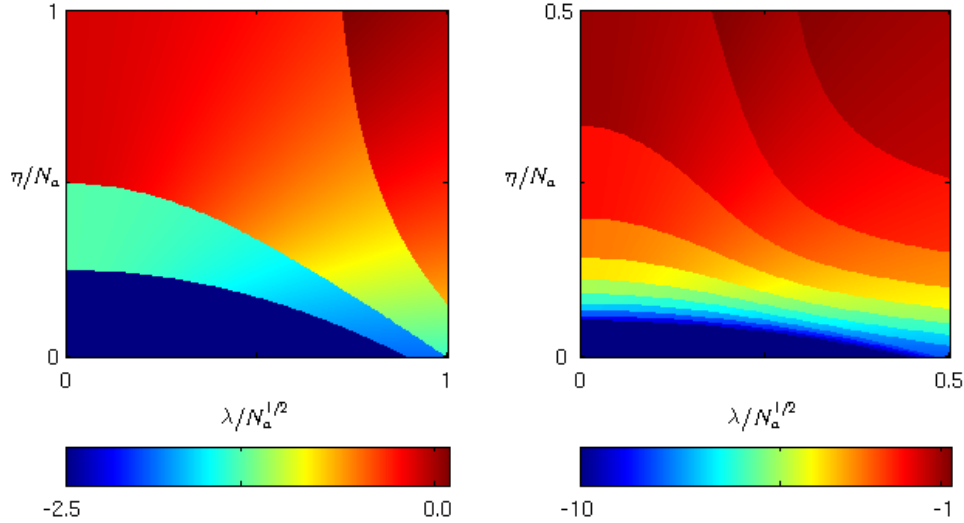


Figura 2.2: Valor esperado del momento angular total en el estado base del modelo con RWA como función de los coeficientes de acoplamiento, para un modelo con 5 átomos y en resonancia, con  $N_a = 5$  izquierda y  $N_a = 20$  derecha.

## 2.3. Estado base para pequeños acoplamientos

Para explorar los efectos de términos contra-rotantes, usamos la transformación unitaria

$$\hat{U} = \exp[-i\alpha(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\hat{J}_y],$$

donde  $\alpha = \frac{\lambda}{\omega_c + \omega_a}$ . Considerando el régimen de pequeños acoplamientos con  $\lambda \ll \omega_q + \omega_c$ , tal que,  $\alpha \ll 1$ , e interacción interatómica pequeña,  $\tilde{\eta} \ll \omega_{q,f}$ . Tomando una aproximación de primer orden, el Hamiltoniano se reduce a:

$$\hat{H}_{CR} \approx \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{J}_z + \tilde{\eta} \hat{J}_z^2 + \Gamma(\hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \hat{a} \hat{J}_+), \quad (2.8)$$

donde  $\Gamma = \frac{\omega_c \tilde{\lambda}}{\omega_c + \omega_a}$ . El Hamiltoniano resultante es equivalente a una aproximación de onda rotante, en resonancia coincide exactamente con ec.(2.1).

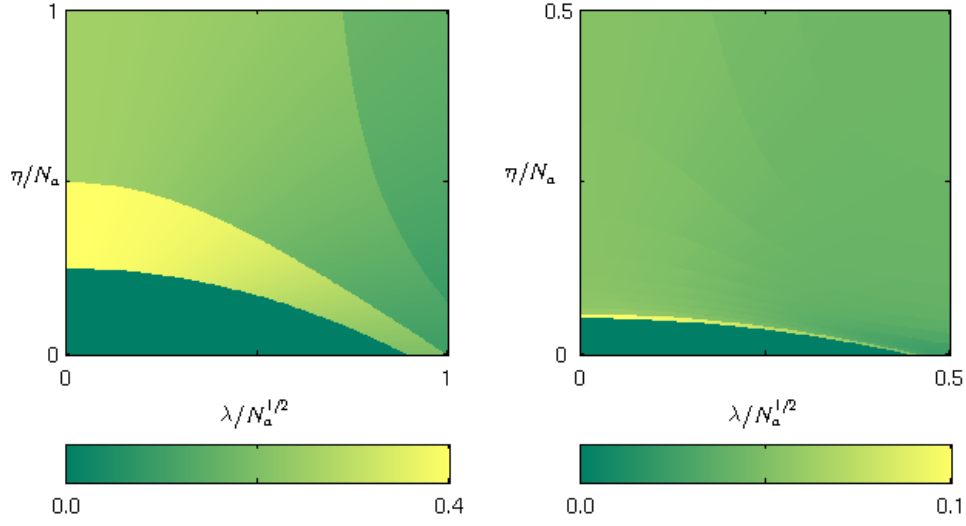


Figura 2.3: Concurrencia en el estado base del modelo con RWA como función de los coeficientes de acoplamiento, para un modelo con 5 átomos y en resonancia con  $N_a = 5$  izquierda y  $N_a = 20$  derecha.

El estado base se obtiene de igual forma que en la sección anterior, en este caso tenemos un primer acoplamiento crítico en:

$$\lambda_{c1} = (\omega_c + \omega_a) \sqrt{\frac{\omega_a - \eta(1 - 1/N_a)}{\omega_c}}. \quad (2.9)$$

En este acoplamiento existe la primer transición de fase Aunque hemos tomado en cuenta términos contra-rotantes, en esta aproximación estamos limitados a una región con  $\lambda \ll \omega_q + \omega_c$  y  $\tilde{\eta} \ll \omega_{q,f}$

## 2.4. Estado base en el modelo semiclásico

Un análisis semiclásico puede ser hecho para coeficientes de acoplamientos grandes, exigiendo tener un ensamble de qubits lo suficientemente grande, esto se conoce como límite termodinámico. Para esto empleamos la representación de Holstein-Primakoff de las matrices de momento [22], [23], [24]

$$\hat{J}_z = \hat{b}^\dagger \hat{b} - N_a/2, \quad (2.10)$$

$$\hat{J}_+ = N_a^{1/2} \hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{N_a}}, \quad (2.11)$$

$$\hat{J}_- = N_a^{1/2} \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{N_a}} \hat{b}. \quad (2.12)$$

Para un número grande de átomos la raíz se aproxima a:

$$\hat{J}_+ \approx N_a^{1/2} \hat{b}^\dagger \left( 1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2N_a} \right), \quad (2.13)$$

$$\hat{J}_- \approx N_a^{1/2} \left( 1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2N_a} \right) \hat{b}. \quad (2.14)$$

Una aproximación de primer orden del Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned} H_{HP} \approx & \omega_c \hat{n} + \omega_a \hat{b}^\dagger \hat{b} + \tilde{\eta} (\hat{b}^\dagger \hat{b})^2 - \tilde{\eta} N_a \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ & + N_a^2 \tilde{\eta} / 4 - \omega_a N_a / 2 + \frac{\tilde{\lambda} \sqrt{N_a}}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \\ & - \frac{\tilde{\lambda}}{4\sqrt{N_a}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{b}^\dagger (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \hat{b}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La energía esperada para estados coherentes  $|\alpha\rangle_f |\beta\rangle_q$  se puede calcular fácilmente ya que  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  y  $\hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$  para los cuales obtenemos

$$\begin{aligned} \langle H \rangle = & \omega_c |\alpha|^2 - \omega_a |\beta|^2 + \tilde{\eta} |\beta|^2 (N_a |\beta|^2 + 1 - N_a) + \frac{N_a^2 \tilde{\eta}}{4} - \frac{N \omega_a}{2} \\ & + \frac{\tilde{\lambda} \sqrt{N_a}}{2} \left[ 1 - \frac{|\beta|^2}{2N_a} \right] (\alpha + \alpha^*) (\beta + \beta^*). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como estamos interesados en la forma de los estados con mínima energía, encontramos los puntos críticos de la ecuación anterior. Derivando respecto a las parte real e imaginaria de  $\alpha$  y  $\beta$  encontramos que existen 7 puntos críticos. El primero de los cuales corresponde el estado vacío  $|0\rangle_f |0\rangle_q$ . Buscando las intersecciones entre ésta y los demás energías críticas, encontramos que, dos no se interceptan y las 4 restantes tienen 4 intersecciones cada una de las cuales sólo una es físicamente realizable y coincide en los cuatro casos. Esto sucede en el punto crítico,

$$\lambda_c^{(sc)} = \sqrt{(\omega_a - \eta(1 - 1/N_a)) \omega_c} \quad (2.17)$$

Este valor es la mitad del encontrado para la aproximación de onda rotante, y a diferencia del modelo con estado base RWA solamente existe una transición.

## 2.5. Solución numérica en el modelo de LMG-TC

Un Hamiltoniano puede ser resuelto de forma numérica escribiendo los operadores en forma matricial. Sin embargo, los operadores del campo tienen dimensión infinita; por

lo cual, no pueden ser representados en un ambiente computacional y un truncamiento es requerido. En el caso particular del Hamiltoniano 2.1, se mostró que conserva el número de excitaciones. Como consecuencia de ésto encontramos que para tener resultados convergidos en el estado base (ver Anexo) basta tener un espacio de fotones con dimensión igual al número de átomos.

En las figuras 2.3(a) y 2.3(b) presentamos la concurrencia generalizada de Wootters [25, 26], que nos da información sobre el enredamiento en los, para el estado base en un modelo finito con 5 y 20 átomos. En el caso de 5 átomos encontramos que existe una GSPT en la misma para cada subespacio descrito en una sección anterior (figura 2.1(a)). La concurrencia es cero en la región correspondiente a cero excitaciones; lo cual es esperado ya que en este subespacio el estado base para el ensamble corresponde al estado  $|j, m = -j\rangle$ . Es decir, ninguna excitación. En la siguiente región la concurrencia va de un máximo, donde el coeficiente de acoplamiento es cero, en este caso tenemos al conjunto de átomos en un estado máximamente enredado correspondiente a  $|j, m = 1 - j\rangle$ . A medida que el acoplamiento toma más fuerza, la excitación en el estado base se distribuye con el campo, y el estado total es de la forma dada por la expresión 2.3. En los siguientes subespacios la concurrencia cambia pero en menor medida.

## 2.6. Solución numérica en el modelo general

El Hamiltoniano (1.7) puede ser resuelto de forma numérica, escribiendolo en forma matricial,

$$H = \omega_c \hat{n} \otimes \mathbb{1} + \omega_a \mathbb{1} \otimes \hat{J}_z + \tilde{\eta} \mathbb{1} \otimes \hat{J}_z^2 + \tilde{\lambda} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \otimes \hat{J}_x. \quad (2.18)$$

De esta forma se pueden conocer los eigenvalores para ciertos valores de  $\lambda$  y  $\eta$ , usando una matriz finita para  $\hat{n}$ , truncada en  $n_{max}$ . La dimensión de ésta determina la precisión del cálculo, siendo más certeros los resultados entre mayor sea su dimensión. Para un número finito de qubits ( $N_a$ ) se requiere un valor de  $n_{max}$  mucho más grande, con la finalidad de tener resultados convergidos; es decir, los valores de los eigenvalores no cambian sustancialmente usando  $n_{max} + 1$  en lugar de  $n_{max}$ ).

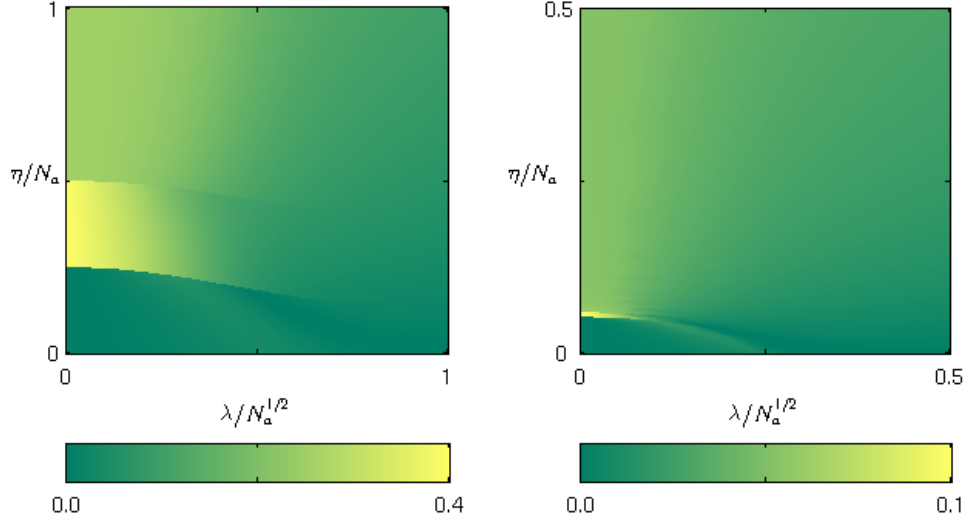


Figura 2.4: Concurrencia en el estado base del modelo completo como función de los coeficientes de acoplamiento, para un modelo con 5 átomos y en resonancia con  $N_a = 5$  izquierda y  $N_a = 20$  derecha.

Sin embargo, un enfoque directo se vuelve impráctico, debido a la gran cantidad de tiempo de computo. Una forma de reducir la dimensión de la matriz del campo consiste en usar estados coherentes [27]. Para ello, primeramente empleamos una rotación en  $J_y$ , esta transformación permite reescribir el Hamiltoniano en la forma

$$\hat{H}_R = \hat{R}^\dagger H \hat{R}, \quad (2.19)$$

donde  $\hat{R} = e^{i\beta \hat{J}_y}$  y  $\beta = \pi/2$ . Esto es igual a

$$\hat{H}_R = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{J}_x + \tilde{\eta} \hat{J}_x^2 - \tilde{\lambda} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{J}_z. \quad (2.20)$$

Aplicando ahora un desplazamiento  $\hat{D}(\hat{J}_z) = e^{\alpha \hat{J}_z (\hat{a}^\dagger - \hat{a})}$

$$\hat{H}_T = \hat{D}^\dagger \hat{H}_R \hat{D} \quad (2.21)$$

resulta

$$\begin{aligned} \hat{H}_T = & \omega_c \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \alpha \hat{J}_z (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \alpha^2 \hat{J}_z^2 \right) \\ & + \frac{\omega_a}{2} (\hat{J}_+ e^{-\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} + \hat{J}_- e^{\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}) \\ & + \frac{\tilde{\eta}}{4} (\hat{J}_+ e^{-\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} + \hat{J}_- e^{\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})})^2 - \tilde{\lambda} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{J}_z, \end{aligned} \quad (2.22)$$

haciendo  $\alpha = \tilde{\lambda}$  los términos lineales de los operadores de aniquilación (creación)  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ) son eliminados. El Hamiltoniano resultante,

$$\hat{H} = \hat{D}^\dagger \hat{R}^\dagger H \hat{R} \hat{D}.$$



Es

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} - \omega_c \alpha^2 \hat{J}_z^2 + \\
 & \frac{\omega_a}{2} (\hat{J}_+ e^{-\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} + \hat{J}_- e^{\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}) \\
 & + \frac{\tilde{\eta}}{4} (\hat{J}_+ e^{-\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} + \hat{J}_- e^{\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})})^2.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Esta ecuación puede ser escrita en forma matricial para los estados de Fock, donde los elementos de la matriz son

$$\begin{aligned}
 \langle n | \hat{H} | m \rangle = & \omega_c \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | m \rangle - \omega_c \alpha^2 \hat{J}_z^2 + \\
 & \frac{\omega_a}{2} \langle n | (\hat{J}_+ e^{-\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} | m \rangle + \hat{J}_- \langle n | e^{\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} | m \rangle) \\
 & + \frac{\tilde{\eta}}{4} (\hat{J}_+ \langle n | e^{-\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} | m \rangle + \hat{J}_- \langle n | e^{\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} | m \rangle)^2.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Las exponenciales corresponden, precisamente, al operador de desplazamiento,

$$\langle m | D(\alpha) | n \rangle = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sqrt{\frac{m!}{n!}} (-\alpha)^{n-m} L_m^{n-m}(\alpha^2) & m \leq n \\ e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sqrt{\frac{n!}{m!}} (\alpha)^{m-n} L_n^{m-n}(\alpha^2) & n < m, \end{cases} \tag{2.25}$$

donde  $L_m^a(x)$  son los polinomios de Laguerre, ver por ejemplo [28].

Sin embargo, el tiempo de calculo en paquetes numéricos comerciales para funciones especiales es grande. Por otro lado, para argumentos grandes suelen ser imprecisos. Se encontró que una alternativa válida para encontrar estos valores es cortar al tamaño requerido la exponencial de la matriz de desplazamiento para una matriz de campo del doble de tamaño necesitado. Con lo que se obtienen los mismos resultados, pero en un tiempo menor.

En general el uso de esta base permite reducir el valor de truncamiento para el campo. En particular se mejora sustancialmente más cuando se trata de un ensamble grande de átomos. En el sistema rotado el máximo número de fotones puede ser reducido sin perder estabilidad, una consecuencia directa es una reducción en el tiempo de computo.

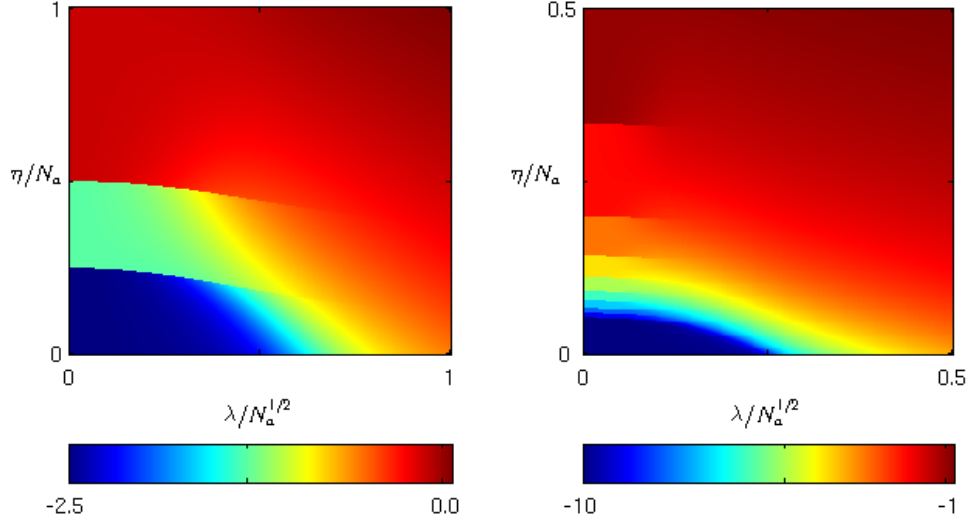


Figura 2.5: Valor esperado del momento angular en el estado base del modelo completo como función de los coeficientes de acoplamiento, para un modelo finito, usando  $N_a = 5$  en la figura a la izquierda y  $N_a = 20$  en la derecha.

En las figuras se muestran propiedades del estado base para Hamiltonianos como función de los coeficientes de acoplamiento, para 5 y 20 átomos. Como se observa las propiedades que se encuentran empleando RWA se conservan cerca del origen. En particular la región donde la concurrencia es máxima coincide en los dos caso principalmente para acoplamientos pequeños. Cuando el acoplamiento es débil existe una región donde la concurrencia aumenta que no corresponde con lo observado con la aproximación de onda rotante y que se debe a la transición de fase continua en el modelo de Dicke la cual es discreta en el modelo de Tavis Cummings.

El valor esperado de  $J_z$  tiende a cero a medida que el valor de los dos parámetros crece, en el eje  $y$  crece a pasos discretos, haciéndose cero en  $\eta/N_a = 1$  para  $N_a$  pares o en  $\eta/N_a = 0,5$  para valores impares. El valor máximo de la concurrencia ocurre cuando el momento angular tiene un valor esperado  $\langle J_z \rangle = 1$ , que representa un estado W.

# Capítulo 3

## Conclusión

En este trabajo se estudió el estado base de un sistema formado por un conjunto de átomos indistinguibles de dos niveles que interaccionan entre si y con un campo cuántico. Se verificó que al aumentar la interacción entre los átomos y átomos-campo el estado base deja de ser el estado vacío.

Usando la aproximación de onda rotante se encontraron analíticamente los valores críticos a los cuales ocurre una transición de fase en el estado base. Se resolvió el Hamiltoniano directamente de forma numérica; con lo cual, se verificó esta transición para 5 y 20 átomos. Esta transición es la primera de una serie de transiciones que ocurren, las cuales se justifican ya que usando la RWA el espacio de Hilbert se puede dividir en subespacios caracterizados por el número de excitaciones y el estado base estará en alguno de estos subespacios. En el primer estado excitado existe una región con una concurrencia máxima cuando el coeficiente de acoplamiento átomo campo es débil, el valor elevado en la concurrencia está asociado con el estado atómico  $|j, 1 - j\rangle$ ; es decir, un estado W (*W-state*). El cual es la suma de todos los estados posibles con un solo átomo excitado. El interés en esta fase es que los átomos están maximamente enredados. Esta región disminuye su tamaño al aumentar el número de átomos en el sistema, haciéndose infinitesimal en el límite termodinámico.

Se mostró la correspondencia entre el modelo completo y el modelo con RWA. Para el caso de pequeños acoplamientos la expresión del Hamiltoniano se pudo llevar a una forma equivalente a la aproximación de onda rotante con el coeficiente de acoplamiento escalado. El estado base se encontró numéricamente para ambos casos, en este caso se recurrió a transformar el Hamiltoniano a una base que garantizará la rápida convergencia numérica. Se encontró que en el modelo de Tavis Cummings existen  $N_a$  transiciones de fase cada una asociada a un subespacio. En el modelo de LMG sólo existen  $N_a/2$  transiciones. Existe una región, en función del acoplamiento interatómico, donde el valor del momento angular total se hace constante  $m = 0$  para este valor el estado base se encuentra en la fase superradiante. Esto sucede cuando  $\eta/N_a = 1$  si  $N_a$  es par, y para  $N_a$  impar ocurre en  $\eta/N_a = 0,5$  y el valor máximo es de  $m = -1/2$ .



Apéndice A

Apéndice

## Convergencia numérica en el estado base

En este trabajo decimos que los resultados convergen, si estos no cambian sustancialmente al cambiar el tamaño de la matriz. La representación de la interacción de la luz materia requiere de dos conjuntos de matrices: para los operadores que actúan en el campo y en el ensamble de átomos. Estas últimas de dimensión finita por defecto, en el caso de las matrices que operan en el campo cuántico requieren un truncamiento. El truncamiento dependerá del número de átomos que se esté considerando, la validez del truncamiento lo verificamos al comparar resultados obtenidos para dimensiones del campo  $N_c$  y  $N_c + 1$  consideraremos que los resultados son válidos cuando la diferencia sea menor que un parámetro arbitrario (usamos  $10^{-6}$ ), si esto sucede diremos que el resultado converge.

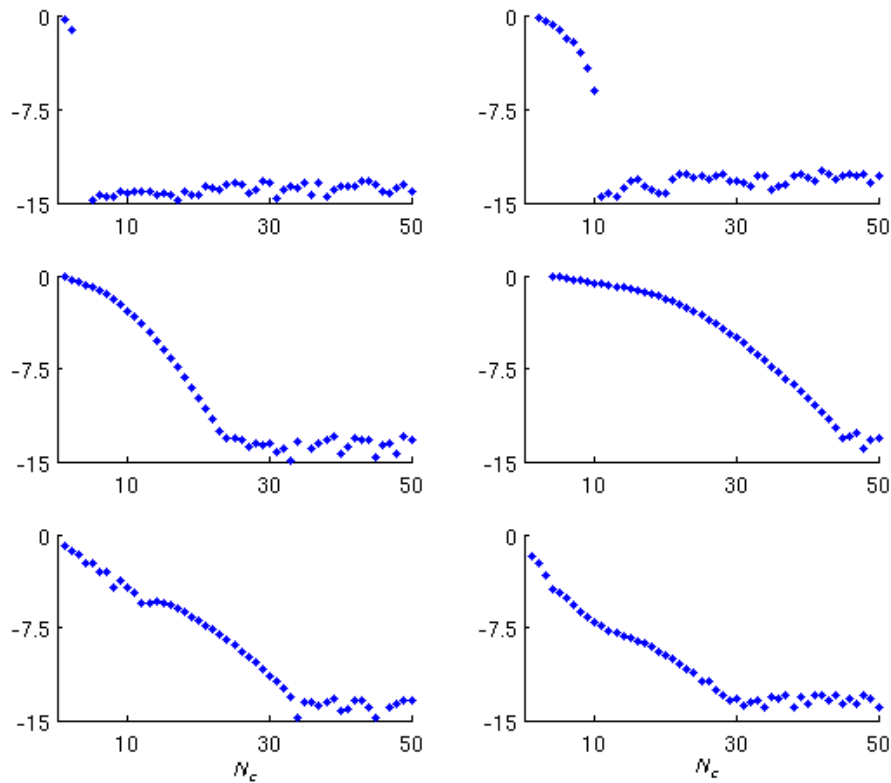


Figura A.1: Convergencia en el estado base. Se grafica la diferencia del logaritmo del valor absoluto de la diferencia de energías calculadas usando matrices con una diferencia de dimensión de uno, contra la dimensión de las mismas para sistemas con 5 (izquierda) y 20 (derecha) átomos en la primer fila Hamiltoniano de Tavis- Cummings, en la fila central Hamiltoniano de Dicke, en la última fila Hamiltoniano de Dicke en la base rotada  $\tilde{\lambda} = 3$ ,  $\tilde{\eta} = 1,5$  y  $\omega_c = \omega_a = 1$ .

Como ejemplo, en la figura A graficamos el logaritmo del valor absoluto de la diferencia de energías calculadas usando matriz de dimensión  $N_c$  (eje X) y otra con dimensión  $N_c + 1$  los resultados convergen cuando este valor sea menor que un cierto umbral (-6).

En el caso del modelo de Tavis Cummings observamos que para obtener resultados convergidos basta con un número de fotones igual a la mitad del número de átomos. Ésto se debe a que en el estado de menor energía está contenido en un subespacio correspondiente a un cierto número de excitaciones, como se describió en la sección 2.1.

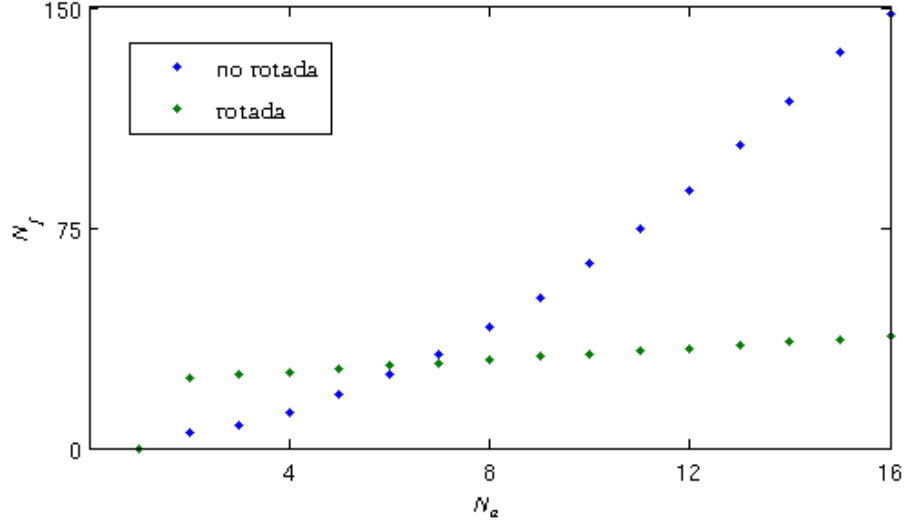


Figura A.2: Valor mínimo de truncamiento para el campo como función del número de átomos, Resolviendo el Hamiltoniano de Dicke directamente la dimensión requerida para el campo aumenta de forma exponencial mientras que usando la transformación es líneal, se usaron valores de  $\tilde{\lambda} = 3$ ,  $\tilde{\eta} = 0$  y  $\omega_c = \omega_a = 1$ .

En el caso del modelo de Dicke, en un tratamiento directo, encontramos que la dimensión del espacio del campo depende del tamaño del ensamble atómico. Por ejemplo, para describir el estado base con 5 átomos se requieren aproximadamente 10 fotones; mientras que para 20 se requieren alrededor de 30.

Usando la transformación unitaria descrita en la sección 2.5, se observa que para el caso de 5 qubits se siguen requiriendo aproximadamente 10 fotones, para el caso con 20 átomos son necesarios también 10 con lo que se demuestra que la dimensión del campo cuantizado se puede reducir. Una observación importante es que el uso de la transformación mejora sólo para ensambles atómicos grandes, mayores que 5 en este caso.

## **A.1. Resultados de la tesis aceptados en publicaciones internacionales**



## Ground state in the finite Dicke model for interacting qubits

R. A. Robles Robles,<sup>1</sup> S. A. Chilingaryan,<sup>2</sup> B. M. Rodríguez-Lara,<sup>1,\*</sup> and Ray-Kuang Lee<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>*Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Calle Luis Enrique Erro No. 1, Sta. Ma. Tonantzintla, Pue. CP 72840, México*

<sup>2</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Caixa Postal 702, 30123-970, Belo Horizonte, MG, Brazil*

<sup>3</sup>*Department of Physics, National Tsing-Hua University, Hsinchu 300, Taiwan, Republic of China*

<sup>4</sup>*Institute of Photonics Technologies, National Tsing-Hua University, Hsinchu 300, Taiwan, Republic of China*

(Received 15 September 2014; published 16 March 2015)

We study the ground state of a finite-size ensemble of interacting qubits driven by a quantum field. We find a maximally entangled  $W$  state in the ensemble part of the system for a certain region of the coupling parameters. The area of this region decreases as the ensemble size increases and, in the classical limit, becomes the line in parameter space that defines the phase transition of the system. In the classical limit, we also study the dynamics of the system and its transition from order to disorder for initial energies close to the ground-state energy. We find that a critical energy providing this transition is related to the minimum of the projection of the total angular momentum of the quantum system in the  $z$  direction.

DOI: [10.1103/PhysRevA.91.033819](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.033819)

PACS number(s): 03.67.Bg, 03.75.Kk, 42.50.Pq

### I. INTRODUCTION

A set of  $N_q$  interacting qubits coupled to a quantized field may be described by the Hamiltonian

$$\hat{H} = \omega_f \hat{N} + \delta \hat{J}_z + \frac{\eta}{N_q} \hat{J}_z^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{N_q}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{J}_x, \quad (1)$$

where the detuning,  $\delta = \omega - \omega_f$ , is defined as the difference between the qubit transition frequency,  $\omega$ , and the quantized field frequency,  $\omega_f$ ; the field-ensemble and the interqubit coupling are given by the constants  $\lambda$  and  $\eta$ , respectively; the orbital angular momentum representation,  $J_i$  with  $i = x, y, z, \pm$ , such that  $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{J}_k$ , describes the qubit ensemble; the creation (annihilation) operators describe the field,  $\hat{a}^\dagger$  ( $\hat{a}$ ); and the total number of excitation in the system is given by the operator  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{J}_z + N_q/2$ . This model may be realized with trapped hyperfine ground states of a Bose-Einstein condensate inside a microwave cavity [1–4] or with arrays of interacting superconducting qubits coupled to the quantum field mode in a coplanar waveguide resonator [5] where a no-go theorem may [6] or may not [7] exist, or with coupled nitrogen vacancy centers interacting with a planar microwave cavity [8].

Beyond the fact that this Hamiltonian describes an experimentally feasible system that goes from integrable at  $\lambda = 0$  [9] to quasi-integrable at  $\eta = 0$  [10], our interest is twofold. First, this Hamiltonian is equivalent to the Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) model [11] in the limit  $\lambda = 0$ . The LMG model produces maximal entanglement at the first-order (second-order) quantum phase transition of the ground state if the coupling is antiferromagnetic (ferromagnetic) [12,13]. The ground-state phase transition of the Hamiltonian in Eq. (1) has been studied in the thermodynamic limit,  $N_q \rightarrow \infty$ , within and without the rotating wave approximation (RWA) [2] and in the quantum regime, using coherent states for both the field and ensemble, without the RWA [3]; these results show the existence of a finite-size first-order quantum phase transition and a second-order super-radiant phase transition. Finite-size

quantum phase transitions in the ground state of the finite Dicke model have been associated with entanglement between the ensemble and the quantum field [14,15] and with bipartite entanglement among qubits due to finite-size effects [16–18]. Thus, for a sufficiently low field-ensemble coupling and an adequate interqubit coupling, it may be possible to obtain a maximally entangled state of the ensemble in the ground state of the system described by Eq. (1). Entanglement is a fundamental quantum mechanical phenomenon [19–23] and a precious resource in quantum information processing [24,25]. For a qubit ensemble, a  $W$  state [26] maximizes pairwise entanglement of formation [27,28] and is a robust source of entanglement [29,30]; i.e., it retains maximal bipartite quantum correlations whenever any pair of qubits are traced out. We will show that such a state is produced in the ground state of the Hamiltonian in Eq. (1) for a given parameter regime. Second, it has been recently shown that the finite-size Dicke model,  $\eta = 0$ , shows two excited-state quantum phase transitions; one for any given coupling at an energy rate  $2E/(\omega N_q) = 1$  [31,32] and another at the superradiant phase at an energy rate  $2E/(\omega N_q) = -1$  [33]. These transitions have been shown as peaks in the Peres lattice [34] of the system and a transition from order to disorder in the equivalent classical system has been shown around these energy rates [35]. The latter, the so-called excited-state quantum phase transition, is related to the unstable fixed points of the classical Dicke Hamiltonian. Some of us have shown the existence of stable and unstable fixed points that produce symmetric and asymmetric dynamics in the classical equivalent of Hamiltonian Eq. (1) under the RWA [36].

In the following, within the RWA and for weak interqubit coupling, we will show analytically that the maximal entanglement produced by the quantum phase transition in the Lipkin-Meshkov-Glick model is retained in the Dicke model for interacting qubits. Furthermore, for a fixed field-ensemble coupling,  $\lambda$ , the interqubit coupling,  $\eta$ , defines a series of first-order phase transitions related to the number of qubits in the ensemble,  $N_q$ , while, for a fixed interqubit coupling, there exists one second-order phase transition related to the couplings ratio [3] and a series of first-order transitions similar to those in the Dicke model under the RWA [16,17].

\*bmlara@inaoep.mx

Also, in Sec. II we will show analytically in the weak coupling regime, and numerically in general, that the inclusion of counterrotating terms does not erase the possibility of obtaining a maximally entangled multiqubit state. Then, in Sec. III, we will find the fixed points of the classical analog of the Dicke model for interacting qubits without the RWA and calculate the critical coupling parameter related to them; this parameter should be identical to that of the quantum case with an ensemble of infinite size. Also, we will show that a transition from order to disorder in the classical dynamics appears at exactly the value of the scaled energy corresponding to the minimum of the  $\hat{J}_z$  operator in the quantum system; in our case this scaled energy is  $2E/(\omega N_q) \geq -1$  and depends linearly on the size of the qubit ensemble.

## II. ENTANGLEMENT IN THE GROUND STATE

Here, we want to show that it is possible to find a maximally entangled  $W$  state in the ground state of our Hamiltonian model for a certain parameter set. For this reason, we need to start with the exact ground state in the RWA.

### A. Rotating wave approximation

The Hamiltonian in Eq. (1) under the RWA,

$$\hat{H}_{\text{RWA}} = \omega_f \hat{N} + \delta \hat{J}_z + \frac{\eta}{N_q} \hat{J}_z^2 + \frac{\lambda}{2\sqrt{N_q}} (\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-), \quad (2)$$

conserves the total number of excitations, thus the corresponding Hilbert space can be partitioned into subspaces where the Hamiltonian becomes a square matrix  $H^{(n)} = H_O^{(n)} + H_I^{(n)}$  with

$$H_O^{(n)} = \omega_f \left( n - \frac{N_q}{2} \right) \mathbb{I}_{\tilde{n}}, \quad (3)$$

$$(H_I^{(n)})_{i,j} = \delta_{i,j} d_i + \frac{\lambda}{2\sqrt{N_q}} (\delta_{i,j-1} o_j + \delta_{i,j+1} o_{j+1}), \quad (4)$$

where the identity matrix of rank  $d$  is given by  $\mathbb{I}_d$ , the row and column labels are in the range  $i, j = \tilde{n}, \tilde{n} + 1, \dots, n$ , where  $\tilde{n} = \max(0, n - N_q)$ , for the photon number  $n = 0, 1, 2, \dots$ . The symbol  $\delta_{i,j}$  stands for Kronecker  $\delta$ , and the diagonal and off-diagonal terms are defined as

$$d_j = \left( n - j - \frac{N_q}{2} \right) \left[ \delta + \frac{\eta}{N_q} \left( n - j - \frac{N_q}{2} \right) \right], \quad (5)$$

$$o_j = \sqrt{j(N_q + j - n)(n - j + 1)}. \quad (6)$$

In each subspace the square matrix is a tridiagonal symmetric real matrix with positive off-diagonal terms, i.e., a Jacobi matrix, and its eigenvalues can be found analytically [37–40]. The ground state of the system is found as the lowest eigenvalue for the set  $\{H^{(n)}\}$  for all values of  $n$ . Furthermore, a first-order quantum phase transition is located at the intersection of two ground-state energies belonging to contiguous subspaces.

The first ground-state structure, which we will call vacuum phase from now on, corresponds to the vacuum field and the

qubit ensemble state with zero excitation,

$$|\psi_g^{(0)}\rangle = |0\rangle \left| \frac{N_q}{2}, -\frac{N_q}{2} \right\rangle. \quad (7)$$

A first quantum phase transition, in a series of first-order quantum phase transitions, is found at the critical coupling strength,

$$\lambda_c = 2\sqrt{\left[ \omega + \left( \frac{1}{N_q} - 1 \right) \eta \right] \omega_f}, \quad (8)$$

with  $0 \leq \eta \leq N_q \omega / (N_q - 1)$ .

After this critical curve in parameter space, the ground state becomes

$$|\psi_g^{(1)}\rangle = c_0^{(1)} |0\rangle \left| \frac{N_q}{2}, 1 - \frac{N_q}{2} \right\rangle + c_1^{(1)} |1\rangle \left| \frac{N_q}{2}, -\frac{N_q}{2} \right\rangle, \quad (9)$$

The amplitudes are given by the expressions  $c_0^{(1)} = h/(h^2 + 1)^{1/2}$  and  $c_1^{(1)} = 1/(h^2 + 1)^{1/2}$  related to the amplitude parameter,

$$h = \frac{(1 - 1/N_q)\eta + \delta - \{4\lambda^2 + [(1 - 1/N_q)\eta - \delta]^2\}^{1/2}}{2\lambda}. \quad (10)$$

In this first nonvacuum phase, the ground state is fully separable,  $|\psi_g^{(1)}\rangle = |1\rangle |N_q/2, -N_q/2\rangle$ , in the limit  $h \rightarrow 0$ ; e.g., choosing  $\delta = 2\lambda$  when  $\lambda$  dominates. A second type of ground state occurs in the limit  $h \rightarrow \pm 1$ , where there is maximal entanglement between the field and the qubit ensemble,  $|\psi_g^{(1)}\rangle = (\pm|0\rangle |N_q/2, 1 - N_q/2\rangle + |1\rangle |N_q/2, -N_q/2\rangle) / \sqrt{2}$ ; e.g., the case  $h \rightarrow -1$  occurs when the field-ensemble coupling,  $\lambda$ , is dominant. And a third type, where the ground state of the whole system is separable,  $|\psi_g^{(1)}\rangle = |0\rangle |N_q/2, 1 - N_q/2\rangle$ , occurs in the limit  $h \rightarrow \infty$ , in other words when  $\lambda$  is small compared to the numerator of Eq. (10). Here, the ensemble part is maximally entangled as the qubit ensemble state  $|N_q/2, 1 - N_q/2\rangle$  is a  $W$  state. Note that the transition from one case to the other is continuous in this first nonvacuum ground state and any extended Dicke model that conserves the total number of excitations has a first nonvacuum phase of this form; e.g., a Dicke model that includes a quantized field nonlinearity [18]. Also, the following phase of the ground state,

$$|\psi_g^{(2)}\rangle = \sum_{j=0}^2 c_0^{(j)} |j\rangle \left| \frac{N_q}{2}, 2 - j - \frac{N_q}{2} \right\rangle, \quad (11)$$

will make the area for the first nonvacuum ground state smaller as the number of qubits in the ensemble grows. This may be a problem in the BEC realization where the size of the ensemble is large but this is not a problem in a circuit-QED realization where the number of qubits is small.

### B. Full model under weak couplings

Now, we want to show that the maximally entangled  $W$  state shown at the first nonvacuum phase survives the inclusion of counterrotating terms. We will use the unitary transformation,

$$\hat{U} = e^{-i\xi(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\hat{J}_y}, \quad \xi = \lambda N_q^{-1/2} / (\omega + \omega_f), \quad (12)$$

in the weak coupling regime,  $\lambda \ll \omega$ , such that  $\xi \ll 1$ . We will also require a weak intraensemble interaction,  $\eta \ll \omega$ , then it is possible to approximate,

$$\hat{H}_{\text{CR}} = \hat{U}^{-1} \hat{H} \hat{U},$$

$$\approx \omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega \hat{J}_z + \frac{\eta}{N_q} \hat{J}_z^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{N_q}} (\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-), \quad (13)$$

with an auxiliary coupling strength  $\tilde{\lambda} = 2\omega_f \lambda / (\omega + \omega_f)$ . In other words, we have made an effective rotating wave approximation, and we already know that such a system has a first-order quantum phase transition at the critical value,

$$\lambda_c^{(\text{CR})} = (\omega + \omega_f) \sqrt{\frac{1}{\omega_f} \left[ \omega + \left( \frac{1}{N_q} - 1 \right) \eta \right]}. \quad (14)$$

Note that on resonance the expression for the first critical coupling in the weak coupling regime, Eq. (14), is equal to the critical coupling in the rotating wave approximation, Eq. (8). The ground state at the first nonvacuum phase is described again by Eq. (9) if we make the substitution  $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}$ . Then, the maximally entangled  $W$  state survives the inclusion of counterrotating terms for the region of interest, i.e., the weak coupling regime.

### C. Semiclassical analysis

Here we present a semiclassical analysis of the ground state just for the sake of completeness. In the Holstein-Primakoff representation of  $\text{SU}(2)$  [41] for a large number of qubits in the ensemble,  $\hat{J}_z = \hat{b}^\dagger \hat{b} - N_q/2$ ,  $\hat{J}_+ \approx \sqrt{N_q} \hat{b}^\dagger (1 - \hat{b}^\dagger \hat{b} / (2N_q))$ , and  $\hat{J}_- \approx \sqrt{N_q} (1 - \hat{b}^\dagger \hat{b} / (2N_q)) \hat{b}$ , the Hamiltonian in Eq. (1), up to a constant, reduces to

$$\hat{H} \approx \omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} + (\omega - \eta) \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\eta}{N_q} (\hat{b}^\dagger \hat{b})^2$$

$$+ \frac{\lambda}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left[ \hat{b}^\dagger \left( 1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{N_q} \right) + \left( 1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{N_q} \right) \hat{b} \right]. \quad (15)$$

Thus, we can consider a coherent state for both the field and the qubit ensemble,  $|\alpha\rangle_f |\beta\rangle_q$ , to calculate the mean energy, up to a constant,

$$\langle \hat{H} \rangle \approx \omega |\alpha|^2 + \left[ \omega - \eta \left( 1 - \frac{|\beta|^2 - 1}{N_q} \right) \right] |\beta|^2$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \left( 1 - \frac{|\beta|^2}{2N_q} \right) (\alpha + \alpha^*) (\beta + \beta^*). \quad (16)$$

In order to find the inflection points for this semiclassical energy, we derive with respect to the real and imaginary parts of both  $\alpha$  and  $\beta$  and solve the system  $\partial \langle \hat{H} \rangle / \partial x = 0$  with  $x = \alpha_R, \alpha_I, \beta_R, \beta_I$ . The trivial solution is the ground state  $|0\rangle_f |0\rangle_q$  and we check for intersections with the remaining six solutions, two of them do not intersect the ground state and the remaining four do it at the semiclassical critical coupling parameter,

$$\lambda_c^{(\text{SC})} = \sqrt{\left[ \omega + \left( \frac{1}{N_q} - 1 \right) \eta \right] \omega_f}, \quad (17)$$

$$= \frac{\lambda_c}{2}, \quad (18)$$

at which a second-order superradiant phase transition occurs [2,3]. It is half the critical strength found for the case without counterrotating terms,  $\lambda_c$  in Eq. (8), as expected from what happens for the Dicke model in the classical limit result, where accounting for counterrotating terms halves the critical coupling found without the counterrotating terms [42].

### D. Numerical analysis

In order to find the numerical ground state of the Hamiltonian in Eq. (1) we will follow a coherent state approach [43]. For this reason we will move to the frame defined by

$$|\psi\rangle = \hat{R}_y \left( \frac{\pi}{2} \right) \hat{D} \left( \frac{\tilde{\lambda}}{\omega_f} \hat{J}_z \right) |\xi\rangle, \quad (19)$$

with the rotation around  $\hat{J}_y$  given as  $\hat{R}_y(\varphi) = e^{i\varphi \hat{J}_y}$  and the displacement operator in the form  $\hat{D}(\beta \hat{O}) = e^{\beta \hat{O} \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{O} \hat{a}}$ , with  $[\hat{O}, \hat{a}] = 0$ , and the size-scaled coupling defined as  $\tilde{\lambda} = \lambda / \sqrt{N_q}$ . In the new frame, the system is ruled by an effective Hamiltonian,

$$\hat{H}_D = \hat{D}^\dagger \left( \frac{\tilde{\lambda}}{\omega_f} \hat{J}_z \right) \hat{R}_y^\dagger \left( \frac{\pi}{2} \right) \hat{H} \hat{R}_y \left( \frac{\pi}{2} \right) \hat{D} \left( \frac{\tilde{\lambda}}{\omega_f} \hat{J}_z \right), \quad (20)$$

$$= \omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{\tilde{\lambda}^2}{\omega_f} \hat{J}_z^2 + \frac{\omega}{2} \left[ \hat{J}_+ \hat{D}^\dagger \left( \frac{\tilde{\lambda}}{\omega_f} \right) + \hat{J}_- \hat{D} \left( \frac{\tilde{\lambda}}{\omega_f} \right) \right]$$

$$+ \frac{\eta}{4N_q} \left[ \hat{J}_+ \hat{D}^\dagger \left( \frac{\tilde{\lambda}}{\omega_f} \right) + \hat{J}_- \hat{D} \left( \frac{\tilde{\lambda}}{\omega_f} \right) \right]^2, \quad (21)$$

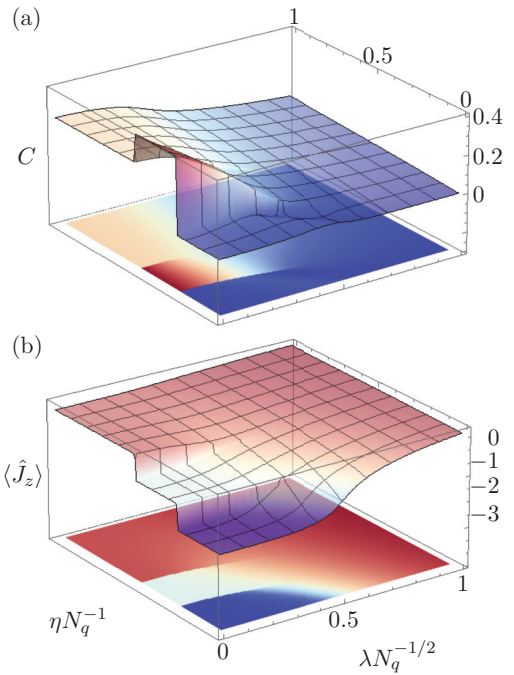


FIG. 1. (Color online) (a) Entangled web concurrence and (b) mean value of  $\hat{J}_z$  for the ground state of the model Hamiltonian in Eq. (1) with five qubits,  $N_q = 5$ , under off-resonant interaction with the quantized field,  $\omega_f = 0.75\omega$ . The qubit interaction,  $\eta$ , and field-ensemble coupling,  $\lambda$ , are given in units of the qubit transition frequency,  $\omega$ .

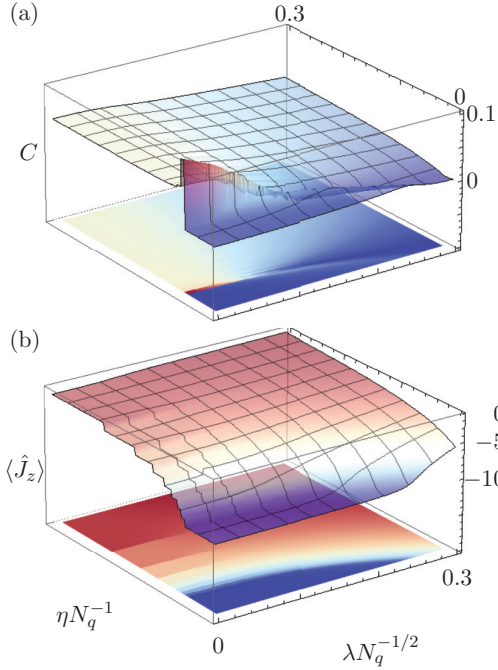


FIG. 2. (Color online) (a) Entangled web concurrence and (b) mean value of  $\hat{J}_z$  for the ground state of the model Hamiltonian in Eq. (1) with 20 qubits,  $N_q = 20$ , under resonant interaction with the quantized field,  $\omega_f = \omega$ . The qubit interaction,  $\eta$ , and field-ensemble coupling,  $\lambda$ , are given in units of the field frequency,  $\omega_f$ .

which is amenable to numerical diagonalization. In the following we show some numerical results that confirm our prediction of a maximally entangled qubit ensemble in the ground state of the model. Figures 1(a) and 2(a) show the concurrence,  $C$ , for the entangled web [27] of qubit ensembles with  $N_q = 5$  and  $N_q = 20$ , in that order. A maximum is reached in the first nonvacuum phase of the ground state and its value is the expected entangled web concurrence maximum of  $2/N_q$ . The critical coupling strength found in the RWA under weak coupling limit and in the semiclassical limit are in good agreement with the numerical results. Figures 1(b) and 2(b) show the mean value of  $\hat{J}_z$ . Note that a single excitation is present for the parameter region where maximum entanglement between the qubits is found as expected [27,28]. Figure 1 deals with an off-resonant case,  $\delta = 0.25$ , and Fig. 2 with the resonant case,  $\delta = 0$ .

### III. CLASSICAL ANALOG

We are also interested in the phase transition of our system related to the classical limit; i.e., making the substitution  $N_q \rightarrow \infty$  in the critical semiclassical coupling  $\lambda_c^{(SC)}$ . Some of us have found a relation between the critical value in the semiclassical limit and the transition for fixed points of the classical analog of interacting qubits driven by a quantum field under the RWA [36]. For this reason, we will explore the classical analog of our Hamiltonian, Eq. (1), which may be obtained by substituting the ensemble operators by the classical angular momentum canonical pair [44],  $\{j_z, \phi\}$ , and the field operators by the

classical harmonic oscillator canonical pair,  $\{p, q\}$ ,

$$\hat{a} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip), \quad (22)$$

$$\hat{a}^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip), \quad (23)$$

$$\hat{J}_z \rightarrow j_z, \quad (24)$$

$$\hat{J}_x \rightarrow \sqrt{j^2 - j_z^2} \cos \phi, \quad (25)$$

$$\hat{J}_y \rightarrow \sqrt{j^2 - j_z^2} \sin \phi, \quad (26)$$

where the variable  $\phi$  is the azimuthal angle of the Casimir vector  $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$  of constant magnitude  $j = N_q/2$ . Thus, the equivalent classical Hamiltonian,

$$H = \frac{\omega_f}{2}(q^2 + p^2) + \omega j_z + \frac{\eta}{2j} j_z^2 + q\lambda\sqrt{j}\sqrt{1 - \frac{j_z^2}{j^2}} \cos \phi, \quad (27)$$

delivers the following equations of motion:

$$\frac{dq}{dt} = \omega_f p, \quad (28)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\omega_f q - \lambda\sqrt{j}\sqrt{1 - \frac{j_z^2}{j^2}} \cos \phi, \quad (29)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega + \frac{j_z}{j} \left[ \eta - \frac{q\lambda \cos \phi}{\sqrt{j}\sqrt{1 - \frac{j_z^2}{j^2}}} \right], \quad (30)$$

$$\frac{dj_z}{dt} = q\lambda\sqrt{j}\sqrt{1 - \frac{j_z^2}{j^2}} \sin \phi. \quad (31)$$

#### A. Stable fixed points

We know from the quantum analysis that the vacuum field and the ensemble without excitation,

$$\{q, p, j_z, \phi\} = \{0, 0, -j, \phi\}, \quad (32)$$

is the ground state of the system with energy,

$$E(0, 0, -j, \phi) = -j \left( \omega - \frac{\eta}{2} \right). \quad (33)$$

Note that this set of variables is not a fixed point of the equations of motion. Now, our classical mechanics system has a different distribution of fixed points compared to noninteracting qubits [33]. In our case, a set of stable fixed points are given by the following parameters,

$$\{q, p, j_z, \phi\} = \{-q_{(s)}, 0, j_z^{(s)}, 0\}, \{q_{(s)}, 0, j_z^{(s)}, \pi\}, \quad (34)$$

with auxiliary definitions,

$$q_{(s)} = \frac{\lambda}{\omega_f} \sqrt{\frac{j^2 - (j_z^{(s)})^2}{j}}, \quad (35)$$

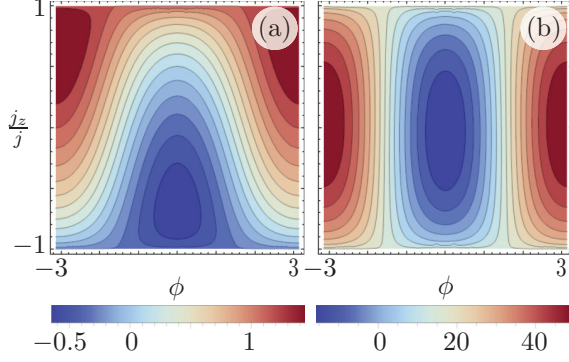


FIG. 3. (Color online) Energy landscape near the fixed points,  $q = q^{(s)}$  and  $p = 0$ , on resonance,  $\omega = \omega_f$ , and fixed interqubit coupling,  $\eta = 0.1\omega_f$ , for ensemble-field couplings (a)  $\lambda = 1.25\lambda_c^{(C)}$  and (b)  $\lambda = 6\lambda_c^{(C)}$ .

$$j_z^{(s)} = -\frac{j\omega\omega_f}{\lambda^2 + \eta\omega_f}, \quad (36)$$

and energy,

$$E(q^{(s)}, 0, j_z^{(s)}, 0) = -\frac{j}{2} \left[ \frac{\lambda^2}{\omega_f} + \frac{\omega^2\omega_f}{(\lambda^2 + \omega_f\eta)} \right]. \quad (37)$$

This energy and that for the set related to the quantum ground state before the phase transition intersect at the critical coupling,

$$\lambda_c^{(C)} = \sqrt{(\omega - \eta)\omega_f}, \quad (38)$$

$$= \frac{\lambda_c}{2} \Big|_{N_q \rightarrow \infty}, \quad (39)$$

i.e., it is just the semi-classical coupling found before for an ensemble of infinite size. Thus, we obtain the expected value for the critical coupling. Figure 3 shows the value of the Hamiltonian,

$$H(j_z, \phi) = \omega j_z + \frac{\eta}{2j} j_z^2 + \frac{\omega_f}{2} q^{(s)2} + \lambda q^{(s)} \sqrt{j} \sqrt{1 - \frac{j_z}{j}} \cos \phi, \quad (40)$$

for stable fixed points parameters,

$$\{q, p\} = \{q^{(s)}, 0\}, \quad (41)$$

for couplings above the critical coupling. It is straightforward to see that a global minimum is located in the south pole of the sphere,  $\{j, \theta, \phi\}$ , and moves toward the equator after crossing the critical value  $\lambda_c^{(C)}$ . Near the fixed points, it is possible to find stable periodical oscillations. These Rabi oscillations localize in a section of the available phase space for values close to the critical coupling; e.g., Fig. 3(a). Note that here the stable fixed points are simpler than those under the RWA [36] where one could immediately identify both a Rabi and Josephson regime.

So far, it has been shown that the classical Hamiltonian provides a landscape where stable Rabi oscillations may

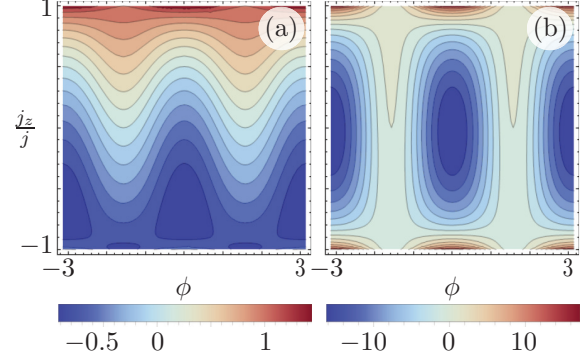


FIG. 4. (Color online) Energy landscape for parameter values,  $q = q^{(s)} \cos \phi$  and  $p = 0$ , on resonance,  $\omega = \omega_f$ , and fixed interqubit coupling,  $\eta = 0.1\omega_f$ , with ensemble-field couplings (a)  $\lambda = 1.25\lambda_c^{(C)}$  and (b)  $\lambda = 6\lambda_c^{(C)}$ .

appear. In order to explore the energy landscape far from the fixed point described above, we may choose the parameter values:

$$\{q, p\} = \{q^{(s)} \cos \phi, 0\}. \quad (42)$$

Such an approach allows us to see both global minima related to the two fixed points of the system, as shown in Fig. 4, but provides us with no further information. A rigorous analysis of the classical model may be of interest to study both stable and unstable fixed points, as it was done for the model under the RWA [36], but, at the moment, we will just focus on sampling initial conditions and their evolution in phase space near the energy minima.

## B. Order and disorder

It was recently shown that for noninteracting qubits there exists a transition from order to chaos for low-energy initial states [35]. Here we want to show that the addition of interaction between qubits conserves this behavior. But, more important, we want to point that, for a large ensemble, the transition from order to disorder near the ground state of the classical system is related to the energy at which the angular momentum projection  $j_z$  is minimum. Unfortunately, we are not able to provide an analytic value for this parameter, just numerical examples. Figure 5 shows Poincaré sections at  $p(t) = 0$  for a system with parameters  $j = 50$ ,  $\omega = \omega_f$ ,  $\eta = 0.1\omega_f$ , and  $\lambda = 1.25\lambda_c^{(SC)}$  and 40 random initial conditions with energy below [Fig. 5(a)], at [Fig. 5(b)], and above [Fig. 5(c)] the scaled energy  $E/(\omega j) = -0.951885$ . The scaled energy was calculated in the quantum model for a maximum number of 125 photons in the field. Note that below this critical scaled energy the system presents only stable orbits and the allowed phase state is restricted [Fig. 5(a)]. Then, at the critical scaled energy [Fig. 5(b)], there exists both stable and chaotic orbits and more of the phase space area is available. Finally, as the initial state energy becomes larger than the critical energy, more phase space is available and the stable orbits start to diminish in number [Fig. 5(c)]. This behavior was found in a sampling of different parameter sets above

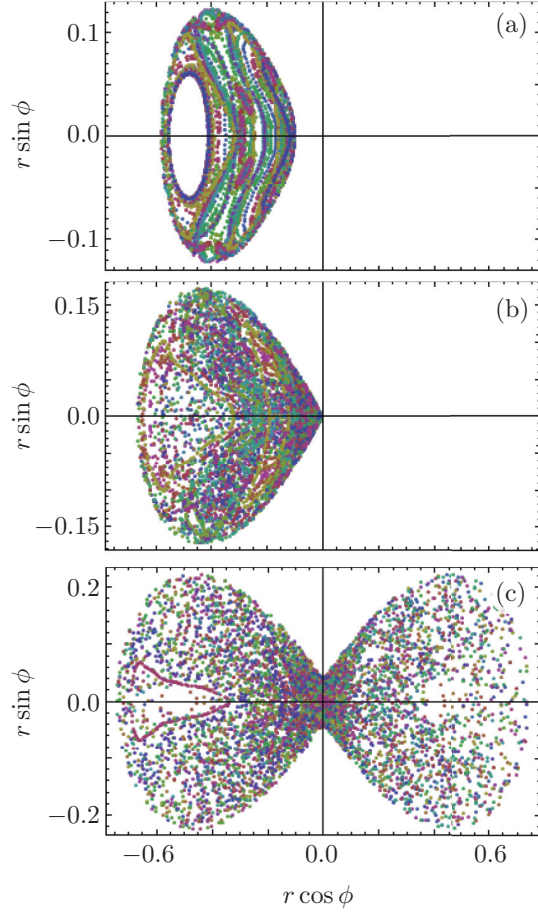


FIG. 5. (Color online) Poincaré sections for phase space  $\{r, \phi\}$  at  $p(t) = 0$  with  $r = 1 + j_z/j$  and initial scaled energies (a)  $E/(\omega j) = -0.99$ , (b)  $E/(\omega j) = -0.951\ 885$ , and (c)  $E/(\omega j) = -0.91$ . The parameter values used here are:  $j = 50$ ,  $\omega = \omega_f$ ,  $\eta = 0.1\omega_f$ ,  $\lambda = 1.25\lambda_c^{(SC)}$ . These deliver a minimum scaled angular momentum projection,  $\langle \hat{J}_z \rangle / (\omega j) = -0.828\ 784$ , with associated scaled energy  $E/(\omega j) = -0.951\ 885$  in the quantum case.

the semiclassical critical coupling,  $\lambda_c^{(SC)}$ . Now, this classical scaled energy corresponds to that of the quantum state with the minimum scaled value of  $\langle \hat{J}_z \rangle / (\omega j)$ .

Figure 6 shows the Peres lattice [34] given by the scaled angular momentum for the parameter set used in Fig. 5; note how the minimum does not correspond to the scaled energy value of  $-1$  found for the Dicke model [35]. Such behavior was confirmed numerically for different ensemble sizes and system parameters. For example, for the parameters mentioned above and varying the ensemble size, the quantum state that gives the minimum value of  $\langle \hat{J}_z \rangle$  has an energy that almost varies linearly in the ensemble size,  $N_q$ , as seen in Fig. 7. This was also confirmed for a sampling of different parameter sets slightly above the semiclassical critical coupling,  $\lambda_c^{(SC)}$ .

IV. CONCLUSIONS

We studied the ground state of a finite ensemble of interacting qubits driven by a quantum field. We found a specific parameter region that delivers a maximally entangled

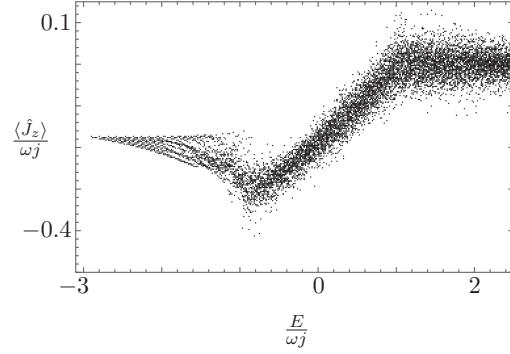


FIG. 6. Peres lattice of the scaled quantum angular momentum  $\langle \hat{J}_z \rangle / (\omega j)$  for the parameters  $\omega = \omega_f$ ,  $\eta = 0.1\omega_f$ ,  $\lambda = 1.25\lambda_c^{(SC)}$  and ensemble size  $N_q = 100$ .

W state in the ground state of the ensemble. This parameter region corresponds to the first of a finite series of quantum phase transition in the ground state. As the ensemble size increases, the area of this first nonvacuum ground state decreases and, in the classical limit when the size of the ensemble is infinite, becomes the critical parameter defining the phase transition of the corresponding classical system.

In addition, while studying the classical analog of the model to find the phase transition, we find a critical energy at which there is a transition from order to disorder in the dynamics of the system. We numerically studied the behavior of different parameter sets and found that, in all cases studied, this critical energy is related to the energy of the quantum state that delivers the minimum value of  $\langle \hat{J}_z \rangle$  for each parameter set. This transition, which is related to an excited state, is interesting because it occurs for values close to the ground state and not

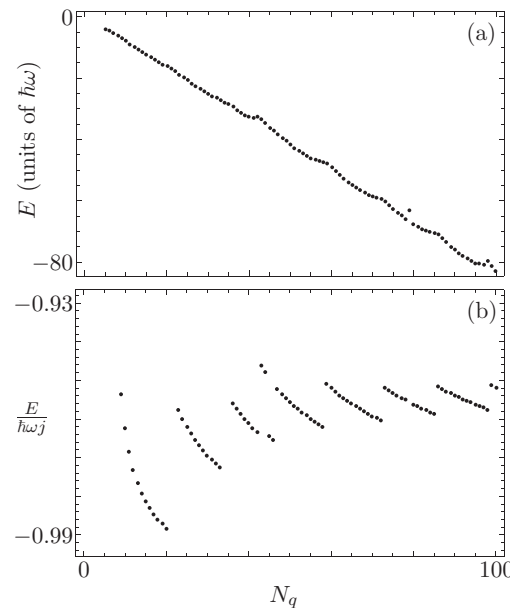


FIG. 7. (a) Energy and (b) scaled energy of the quantum state that delivers a minimum scaled angular momentum projection  $\langle \hat{J}_z \rangle / (\omega j)$  for the parameters  $\omega = \omega_f$ ,  $\eta = 0.1\omega_f$ ,  $\lambda = 1.25\lambda_c^{(SC)}$  and ensemble size  $N_q \in [5, 100]$ .

far from it as one would expect. We plan to extend our research regarding excited-state phase transitions of this model in the near future.

### ACKNOWLEDGMENTS

R.A.R.R. acknowledges financial support from CONACYT through the master degree scholarship No. 298009.

- 
- [1] G. Chen, J.-Q. Liang, and S. Jia, *Condens. Matter Phys.* **321**, 2 (2006).
- [2] G. Chen, Z. Chen, and J.-Q. Liang, *Europhys. Lett.* **80**, 40004 (2007).
- [3] Q.-H. Chen, T. Liu, Y.-Y. Zhang, and K.-L. Wang, *Phys. Rev. A* **82**, 053841 (2010).
- [4] D. Nagy, G. Szirmai, and P. Domokos, *Eur. Phys. J. D* **48**, 127 (2008).
- [5] G. Chen, Z. Chen, and J. Liang, *Phys. Rev. A* **76**, 055803 (2007).
- [6] O. Viehmann, J. von Delft, and F. Marquardt, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 113602 (2011).
- [7] P. Nataf and C. Ciuti, *Nature Commun.* **1**, 72 (2010).
- [8] L. J. Zou, D. Marcos, S. Diehl, S. Putz, J. Schmiedmayer, J. Majer, and P. Rabl, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 023603 (2014).
- [9] J. Dukelsky, G. G. Dussel, C. Esebbag, and S. Pittel, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 050403 (2004).
- [10] C. Emary and T. Brandes, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 044101 (2003).
- [11] H. J. Lipkin, N. Meshkov, and A. J. Glick, *Nucl. Phys.* **62**, 188 (1965).
- [12] J. Vidal, G. Palacios, and R. Mosseri, *Phys. Rev. A* **69**, 022107 (2004).
- [13] J. Vidal, R. Mosseri, and J. Dukelsky, *Phys. Rev. A* **69**, 054101 (2004).
- [14] N. Lambert, C. Emary, and T. Brandes, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 073602 (2004).
- [15] J. Vidal and S. Dusuel, *Europhys. Lett.* **74**, 817 (2006).
- [16] V. Bužek, M. Orszag, and M. Roško, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 163601 (2005).
- [17] O. Tsyplatyev and D. Loss, *J. Phys.: Conf. Ser.* **193**, 012134 (2009).
- [18] B. M. Rodríguez-Lara and R.-K. Lee, *J. Opt. Soc. Am. B* **27**, 2443 (2010).
- [19] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [20] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 823 (1935).
- [21] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 844 (1935).
- [22] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [23] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [24] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [25] J. Preskill, *J. Mod. Opt.* **47**, 127 (2000).
- [26] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac, *Phys. Rev. A* **62**, 062314 (2000).
- [27] M. Koashi, V. Bužek, and N. Imoto, *Phys. Rev. A* **62**, 050302 (2000).
- [28] W. Dür, *Phys. Rev. A* **63**, 020303 (2001).
- [29] H. J. Briegel and R. Raussendorf, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 910 (2001).
- [30] A. Sen(De), U. Sen, M. Wieśniak, D. Kaszlikowski, and M. Zukowski, *Phys. Rev. A* **68**, 062306 (2003).
- [31] P. Pérez-Fernández, P. Cejnar, J. M. Arias, J. Dukelsky, J. E. García-Ramos, and A. Relaño, *Phys. Rev. A* **83**, 033802 (2011).
- [32] P. Pérez-Fernández, A. Relaño, J. M. Arias, P. Cejnar, J. Dukelsky, and J. E. García-Ramos, *Phys. Rev. E* **83**, 046208 (2011).
- [33] M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández, and J. G. Hirsch, *Phys. Rev. A* **89**, 032101 (2014).
- [34] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1711 (1984).
- [35] M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández, and J. G. Hirsch, *Phys. Rev. A* **89**, 032102 (2014).
- [36] B. M. Rodríguez-Lara and R.-K. Lee, *Phys. Rev. E* **84**, 016225 (2011).
- [37] J. D. Swalen and L. Pierce, *J. Math. Phys.* **2**, 736 (1961).
- [38] L. Pierce, *J. Math. Phys.* **2**, 740 (1961).
- [39] R. Haydock, V. Heine, and M. J. Kelly, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **5**, 2845 (1972).
- [40] H. A. Yamani and M. S. Abdelmonem, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 2889 (1997).
- [41] J. Katriel, A. I. Solomon, G. D'Ariano, and M. Rasetti, *Phys. Rev. D* **34**, 2332 (1986).
- [42] H. J. Carmichael, C. W. Gardiner, and D. F. Walls, *Phys. Lett. A* **46**, 47 (1973).
- [43] Q.-H. Chen, Y.-Y. Zhang, T. Liu, and K.-L. Wang, *Phys. Rev. A* **78**, 051801(R) (2008).
- [44] M. A. M. de Aguiar, K. Furuya, C. H. Lewenkopf, and M. C. Nemes, *Ann. Phys.* **216**, 291 (1992).





# Bibliografía

- [1] R. Dicke, “Coherence in spontaneous radiation processes,” *Physical Review*, vol. 93, no. 1, p. 99, 1954.
- [2] H. J. Lipkin, N. Meshkov, and A. Glick, “Validity of many-body approximation methods for a solvable model:(i). exact solutions and perturbation theory,” *Nuclear Physics*, vol. 62, no. 2, pp. 188–198, 1965.
- [3] E. T. Jaynes and F. Cummings, “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, no. 1, pp. 89–109, 1963.
- [4] M. Tavis and F. W. Cummings, “Exact solution for an n-molecule—radiation-field hamiltonian,” *Physical Review*, vol. 170, no. 2, p. 379, 1968.
- [5] K. Hepp and E. H. Lieb, “On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: The dicke maser model,” *Annals of Physics*, vol. 76, no. 2, pp. 360–404, 1973.
- [6] Y. K. Wang and F. Hioe, “Phase transition in the dicke model of superradiance,” *Physical Review A*, vol. 7, no. 3, p. 831, 1973.
- [7] H. Carmichael, C. Gardiner, and D. Walls, “Higher order corrections to the dicke superradiant phase transition,” *Physics Letters A*, vol. 46, no. 1, pp. 47–48, 1973.
- [8] K. Rzażewski, K. Wódkiewicz, and W. Żakowicz, “Phase transitions, two-level atoms, and the a 2 term,” *Physical Review Letters*, vol. 35, no. 7, p. 432, 1975.
- [9] M. Orszag, “Phase transition of a system of two-level atoms,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 10, no. 11, p. 1995, 1977.
- [10] D. Nagy, G. Szirmai, and P. Domokos, “Self-organization of a bose-einstein condensate in an optical cavity,” *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, vol. 48, no. 1, pp. 127–137, 2008.
- [11] D. Nagy, G. Kónya, G. Szirmai, and P. Domokos, “Dicke-model phase transition in the quantum motion of a bose-einstein condensate in an optical cavity,” *Physical review letters*, vol. 104, no. 13, p. 130401, 2010.
- [12] K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke, and T. Esslinger, “Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity,” *Nature*, vol. 464, no. 7293, pp. 1301–1306, 2010.

- 
- [13] K. Baumann, R. Mottl, F. Brennecke, and T. Esslinger, “Exploring symmetry breaking at the dicke quantum phase transition,” *Physical review letters*, vol. 107, no. 14, p. 140402, 2011.
- [14] N. Lambert, C. Emary, and T. Brandes, “Entanglement and the phase transition in single-mode superradiance,” *Physical review letters*, vol. 92, no. 7, p. 073602, 2004.
- [15] C. Emary and T. Brandes, “Phase transitions in generalized spin-boson (dicke) models,” *Physical Review A*, vol. 69, no. 5, p. 053804, 2004.
- [16] V. Bužek, M. Orszag, and M. Roško, “Instability and entanglement of the ground state of the dicke model,” *Physical review letters*, vol. 94, no. 16, p. 163601, 2005.
- [17] J. Vidal, R. Mosseri, and J. Dukelsky, “Entanglement in a first-order quantum phase transition,” *Phys. Rev. A*, vol. 69, p. 054101, May 2004.
- [18] O. Tsyplatyev and D. Loss, “Dicke model: entanglement as a finite size effect,” vol. 193, no. 1, p. 012134, 2009.
- [19] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral, “Entanglement in many-body systems,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 80, no. 2, p. 517, 2008.
- [20] B. M. Rodríguez-Lara and R.-K. Lee, “Quantum phase transition of nonlinear light in the finite size dicke hamiltonian,” *JOSA B*, vol. 27, no. 11, pp. 2443–2450, 2010.
- [21] J. I. Latorre, R. Orús, E. Rico, and J. Vidal, “Entanglement entropy in the lipkin-meshkov-glick model,” *Physical Review A*, vol. 71, no. 6, p. 064101, 2005.
- [22] J. Katriel, A. Solomon, G. d’Ariano, and M. Rasetti, “Multiboson holstein-primakoff squeezed states for  $su(2)$  and  $su(1, 1)$ ,” *Physical Review D*, vol. 34, no. 8, p. 2332, 1986.
- [23] V. Bužek and I. Jex, “Collapse-revival phenomenon in the jaynes-cummings model interacting with the multiphoton holstein-primakoff  $su(2)$  coherent state,” *Journal of Modern Optics*, vol. 36, no. 11, pp. 1427–1434, 1989.
- [24] C. Emary and T. Brandes, “Quantum chaos triggered by precursors of a quantum phase transition: The dicke model,” *Physical review letters*, vol. 90, no. 4, p. 044101, 2003.
- [25] S. Hill and W. K. Wootters, “Entanglement of a pair of quantum bits,” *Physical review letters*, vol. 78, no. 26, p. 5022, 1997.
- [26] M. Koashi, V. Bužek, and N. Imoto, “Entangled webs: Tight bound for symmetric sharing of entanglement,” *Physical Review A*, vol. 62, no. 5, p. 050302, 2000.
- [27] Q.-H. Chen, Y.-Y. Zhang, T. Liu, and K.-L. Wang, “Numerically exact solution to the finite-size dicke model,” *Physical Review A*, vol. 78, no. 5, p. 051801, 2008.
- [28] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, and H. Bateman, *Higher transcendental functions*, vol. 1. New York McGraw-Hill, 1953.