



**I
N
A
O
E**

Análisis y síntesis de campos ópticos con estructura Markoviana

por

Carina Gutiérrez Ojeda

Tesis sometida como requisito parcial para obtener
el grado de

**Maestro en Ciencias con especialidad en
Óptica**

en el

Instituto Nacional en Astrofísica, Óptica y Electrónica
Agosto 2017
Tonanzintla, Puebla

Supervisada por
Dr. Gabriel Martínez Nikonoff

©INAOE 2017

Derechos reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y
distribuir copias de esta tesis en su totalidad
o en partes mencionando la fuente.



Agradecimientos

Agradezco a mis padres por su apoyo incondicional durante estos dos años de maestría, por levantar mis ánimos y orientarme cada vez que me sentía confundida o que no creía poder resolver un problema más.

Agradezco al Dr. Gabriel Martínez Niconoff por confiar en mi para permitirme desarrollar un tema de investigación, además por su orientación y paciencia para plantear y resolver el tema de tesis.

Agradezco a Teresa Cèrda Astorga por ser mi amiga y por motivarme para salir a un congreso internacional RIAO noviembre 2016. Particularmente a Jorge A. Ugalde Ontiveros por ser mi apoyo moral y personal para desarrollarme en la maestría, por hacer que tuviera confianza en mí y mostrándome que todos somos capaces de hacer las cosas siempre que se tenga la intención de resolver los problemas, por ayudarme a ser una mejor persona, comprensiva, paciente y por estar a mi lado durante todo este proceso. A mis amigos que llenaron de alegría y retos durante mi estancia de la maestría en el INAOE.

Finalmente, agradezco al CONACYT por el apoyo de beca que me dio para realizar mis estudios de maestría.

Dedicado a mis padres

Análisis y síntesis de campos ópticos con estructura Markoviana

Resumen

Se propone implementar procesos estocásticos con las cadenas de Markov del tipo Ehrenfest para describir la evolución de la función de amplitud asociada a un campo óptico. Como prototipo, se usa un conjunto de modos Bessel cuyos valores de amplitud tienen asociados un vector de probabilidad dada por las condiciones iniciales. La propagación de la coherencia parcial del campo óptico es estudiada analizando la convergencia de los procesos estocásticos por medio de una matriz de transición de probabilidades, aplicada a un vector con las condiciones iniciales. Durante éste proceso las propiedades de entropía de los campos ópticos son analizadas.

Como una posible aplicación, se describe el proceso de grabado de un holograma con la interferencia de dos modos markovianos. Durante el proceso de reconstrucción el campo con que se ilumina el holograma es un modo markoviano, que puede ser controlado a través de la evolución dada por la matriz de transición estocástica

En cada caso se muestra una simulación numérica que predice los resultados teóricos.

Analysis and synthesis of optical fields with Markovian structure

Abstract

We propose the implementation of a Markov chain type Ehrenfest process to describe the evolution of the amplitude function associated to an optical field. As prototype, we use a set of Bessel modes whose amplitude values have associated a probability vector for the boundary condition. The partially coherent propagation of the optical field is studied by analyzing the convergence of the process by means of the transition probability matrix applied to an initial condition vector.

As a possible application, we describe the recording process with the interference of two Markov modes. During the reconstruction process, the hologram is illuminated with a Markovian mode which can be controlled through the evolution given by a transition matrix. Computer simulations are presented.

Contenido

1	Introducción	1
2	Coherencia y procesos estocásticos en campos ópticos	3
2.1	Conceptos fundamentales de coherencia óptica	3
2.2	Análisis de coherencia temporal	3
2.3	Coherencia espacial	6
2.4	Concepto de coherencia a través de correlaciones	10
2.4.1	Funciones de correlación	11
2.4.2	Autocorrelación de una suma finita con amplitudes aleatorias	12
2.4.3	Coherencia mutua de un campo incoherente	13
2.5	Soporte teórico de variables aleatorias y probabilidad	16
2.5.1	Teorema de Bayes	17
2.6	Definición de procesos estocásticos	20
2.7	Procesos de Markov	20
2.7.1	Cadenas de Markov	20
3	Campos ópticos con estructura Markoviana	23
3.1	Teoría de modos	23
3.2	Cadenas de Markov tipo Eherenfest	30
3.2.1	Matriz de transición tipo Eherenfest	31
3.2.2	Evolución de las matrices de transición tipo Eherenfest	32
3.3	Entropía de información o entropía de Von Neumann	33
3.4	Modos ópticos markovianos	36
3.4.1	Modos ópticos markovianos del tipo Eherenfest	37
3.4.2	Simulación numérica de los modos Markovianos tipo Eherenfest . . .	43
4	Aplicación de modos ópticos markovianos en la holografía	49
4.1	Representación matemática de generación y reconstrucción de un holograma	50
4.2	Generación de hologramas con modos ópticos markovianos	51
4.2.1	Simulación numérica de hologramas con modos ópticos markovianos	53
5	Conclusiones	60
	Lista de Figuras	62
	Lista de Tablas	64

Bibliografía

65

Capítulo 1

Introducción

La evolución temporal/espacial de campos ópticos esta determinada por su distribución de amplitud compleja, cuyas fluctuaciones están relacionadas a la coherencia parcial. En este contexto, es esencial estudiar y controlar los efectos de coherencia los cuales ofrecen interesantes aplicaciones en pinzas ópticas sintonizables, transmisión de una gran cantidad de datos, síntesis y control de estados de polarización parcial, etc [19]. Desde un punto de vista teórico, el estudio de coherencia es un tema interesante debido a que una dislocación de fase sobre las condiciones de frontera pueden ser relacionada con la generación de cargas topológicas, cuando la propagación ocurre en un medio con índice de refracción variable es posible inducir corrientes topológicas y nuevas características físicas emergen, en particular cambios en la función de amplitud y fase generados por procesos de entropía, los cuales pueden ser controlados a través de la función de coherencia [11] [18].

Los efectos de la coherencia parcial implican una dependencia temporal sobre algunos parámetros que caracterizan la función de amplitud y fase [12]. En el presente trabajo, se describe la síntesis y análisis de nuevos campos ópticos con propiedades de coherencia parcial, estableciendo una analogía con los sistemas termodinámicos en equilibrio [4]. Esto puede ser descrito siguiendo una cadena de Markov tipo Eherenfest, cuyo modelo se basa en el modelo de cajas, el cual consiste de dos cajas etiquetadas A y B , conteniendo N pelotitas enumeradas del 1 a N . La caja A contiene q pelotitas y la caja B contiene $N - q$ pelotitas y están distribuidas aleatoriamente en cada caja. El proceso consiste en seleccionar una pelotita y después transferirla a la otra caja con una probabilidad α o de mantenerla en la misma caja con una probabilidad $1 - \alpha$, cuando el proceso es aplicado recursivamente la distribución de pelotitas sobre cada caja alcanza una configuración de

equilibrio [7] [6]. Para sintetizar el campo óptico, las pelotitas etiquetadas son relacionadas con los modos Bessel de orden entero y sus propiedades de coherencia son relacionadas con los procesos de entropía. Usando una simulación numérica se muestran la predicción de las intensidades de los modos generados.

Actualmente, existe un interés en la comunidad científica en analizar campos ópticos cuyas fluctuaciones temporales no presentan un comportamiento estacionario, consecuentemente, el tratamiento clásico de la coherencia parcial no puede ser implementado para su estudio. Sin embargo, estos campos ópticos pueden presentar una relación de orden que puede ser estudiada incorporando procesos de entropía, ofreciendo aplicaciones interesantes. Grabando campos ópticos markovianos sobre un holograma e iluminando éste con otro tipo de campo, el campo óptico reconstruido demuestra propiedades físicas interesantes con aplicaciones en filtros espaciales sintonizables y también en sistemas de comunicación a través de la transmisión de información encriptada. Por tal motivo, se analiza el grabado de un holograma con campos ópticos markovianos así como el análisis de los campos ópticos reconstruidos. Haciendo una simulación numérica, se presenta la predicción teórica.

Capítulo 2

Coherencia y procesos estocásticos en campos ópticos

2.1 Conceptos fundamentales de coherencia óptica

La coherencia óptica es el estudio de la correlación en amplitudes de dos puntos arbitrarios del campo óptico. La manifestación de la coherencia puede determinarse a través del fenómeno de interferencia puesto que algunas características de los patrones de interferencia proporcionan una medida para caracterizar la interacción entre dos modos en dos puntos diferentes del espacio/tiempo [5]. El problema por resolver en teoría de coherencia consiste en describir las correlaciones en amplitud en diferentes puntos del espacio/tiempo. Como se muestra a lo largo del capítulo es muy complejo desde el punto de vista matemático, por lo tanto es conveniente analizarlo separando la correlación temporal de la espacial.

2.2 Análisis de coherencia temporal

Para iniciar el estudio de coherencia, se analizan las fluctuaciones de amplitud del campo óptico generado por una onda plana. Como nos interesan las fluctuaciones temporales, es conveniente analizar el campo en un punto fijo. Para este caso, el campo óptico toma la forma [14]

$$U(t) = a \cos(\phi - \omega_0 t), \quad (2.1)$$

donde $\omega_0 \in \omega \pm \Delta \omega$ con a y ϕ constantes de amplitud y fase respectivamente, ω es la frecuencia y t el tiempo. El parámetro que caracteriza a la luz cuasimonocromática es su

ancho de banda , definido como $\frac{\Delta\omega}{\bar{\omega}} \ll 1$.

En un caso más general, tanto la fase como la frecuencia no son constantes, por lo que la amplitud del campo óptico toma la forma

$$U(t) = a(t) \cos[\phi(t) - \bar{\omega}t]. \quad (2.2)$$

Notar que la amplitud y la fase dependen del tiempo y sus valores ahora pueden fluctuar aleatoriamente. Para luz cuasimonocromática estas funciones varían lentamente sobre intervalos de tiempo cortos comparados con su ancho de banda, tal que $\Delta t \ll \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

Es importante mencionar que estas fluctuaciones estadísticamente no varían de manera significativa en intervalos de tiempo menores a Δt , por lo que a este comportamiento lo llamaremos *estadística estacionaria*. Esta hipótesis no se cumple en campos Markovianos, que más adelante se describen.

Como habíamos mencionado, la correlación esta directamente relacionada con la interferencia la cual se manifiesta a través de una redistribución de energía generada por la superposición de dos campos ópticos, donde ambos deben de provenir de la misma fuente, tener amplitudes similares, tener un ancho de banda similar y estado de polarización.

Sean dos campos ópticos provenientes de distintos puntos en el espacio \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 , tal que son de la forma

$$U_1(t) = a_1(t) \cos[\phi_1(t) - \bar{\omega}t] \quad (2.3)$$

$$U_2(t) = a_2(t) \cos[\phi_2(t) - \bar{\omega}t]. \quad (2.4)$$

Superponiendo estos campos y calculando su módulo al cuadrado tenemos,

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t) = a_1(t) \cos[\phi_1(t) - \bar{\omega}t] + a_2(t) \cos[\phi_2(t) - \bar{\omega}t + \delta]. \quad (2.5)$$

$$|U(t)|^2 = U(t)U^*(t) = I = |U_1(t)|^2 + |U_2(t)|^2 + 2a_1(t)a_2(t) \cos[\phi_1 - \bar{\omega}t] \cos[\phi_2 - \bar{\omega}t + \delta] \quad (2.6)$$

donde δ es la diferencia de fase y usando esta propiedad trigonométrica: $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$, con $A = \phi_1 - \bar{\omega}t$ y $B = \phi_2 - \bar{\omega}t + \delta$, llegamos a

$$I = |U_1(t)|^2 + |U_2(t)|^2 + a_1(t)a_2(t)[\cos(\phi_1 + \phi_2 - 2\bar{\omega}t - \delta) + \cos(\phi_1 - \phi_2 + \delta)]$$

o de forma abreviada

$$I = I_1 + I_2 + a_1(t)a_2(t)[\cos(\phi_1 + \phi_2 - 2\bar{\omega}t - \delta) + \cos(\phi_1 - \phi_2 + \delta)] \quad (2.7)$$

donde

$$I_1 = |U_1(t)|^2$$

y

$$I_2 = |U_2(t)|^2.$$

Tomando el promedio de las intensidades sobre un intervalo de tiempo de medición $-T \leq t < T$, el cual es mucho más grande comparado con el inverso del ancho de banda de la luz utilizada, esto es $T \gg \frac{1}{\Delta\omega}$, el promedio de las intensidades en un intervalo de tiempo más grande comparado a las oscilaciones es [21],

$$\langle I \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T I(t) dt. \quad (2.8)$$

Para el cálculo de los valores promedio, se suponen que la amplitud y fase son variables aleatorias estadísticamente independientes. La ecuación 2.7 se reescribe como los valores promedios de las intensidades en un tiempo t , tal como

$$\langle I(t) \rangle_t = \langle I_1(t) \rangle_t + \langle I_2(t) \rangle_t +$$

$$\langle a^2 \rangle \langle \cos(\phi_1 + \phi_2 - 2\bar{\omega}t - \delta) \rangle_t + \langle a^2 \rangle \langle \cos(\phi_1 - \phi_2 + \delta) \rangle_t, \quad (2.9)$$

de este modo, se llega a que el valor promedio de las intensidades de los módulos al cuadrado es,

$$\langle I_1(t) \rangle_t = \langle I_2(t) \rangle_t = \frac{a^2}{2}, \quad (2.10)$$

$$\langle \cos(\phi_1 - \phi_2 \mp \delta) \rangle_t = 0, \quad (2.11)$$

Considerando que $\omega = 2\pi\nu$ y $\nu = \frac{1}{\tau}$, entonces el orden de esta relación es $\frac{\tau}{T} = \frac{10^{-15} \text{ s}}{10^{-3} \text{ s}} \sim 10^{-12}$; siendo éste muy pequeño se puede despreciar del segundo término de la ecuación 2.10.

Una forma de medir la coherencia temporal, es por medio del interferómetro de Michelson. Para este caso, supongamos que tenemos una fuente puntual S , de la cual emerge una onda esférica tal como se muestra en la Figura 2.1. El recorrido de ida y regreso del

haz entre cada uno de los brazos, produce un desfase de $c \Delta t$, tal que si Δt es lo suficiente pequeño, es decir,

$$\Delta t \lesssim \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (2.12)$$

podremos observar franjas de interferencia en el plano de observación las cuales serán una manifestación de la coherencia temporal entre los dos haces, ya que el contraste de las franjas depende del tiempo de retraso Δt entre ellos.

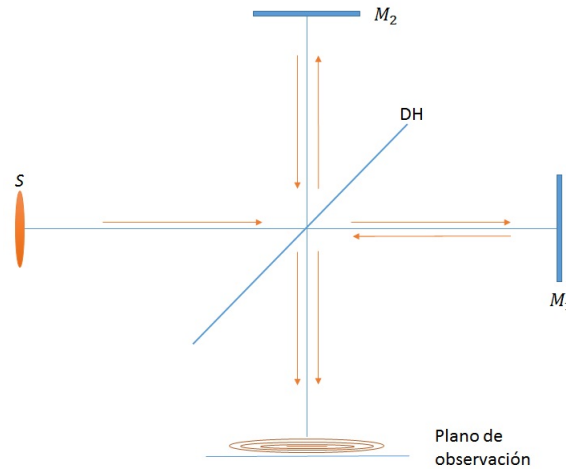


Figura 2.1: Arreglo del interferómetro de Michelson, donde S es una fuente extendida, DH es un divisor de haz, M_1 y M_2 son los espejos.

Un tratamiento complementario a los procesos de coherencia parcial surge cuando se analiza el campo en dos puntos del espacio, como se describe en la siguiente sección.

2.3 Coherencia espacial

El estudio de coherencia espacial consiste en analizar las correlaciones en dos puntos del espacio considerando la geometría extensa de un campo óptico.

La coherencia espacial se mide con el interferómetro de Young, Figura 2.2. El montaje consiste de una fuente de iluminación extensa S , posteriormente a una distancia d_1 se encuentra una pantalla con dos orificios, cada uno separados a respecto al eje y finalmente a una distancia d_2 se podrán ver las franjas de interferencia sobre un plano de observación, donde P_0 es el punto sobre un orden de la franja.

La fuente extensa S se interpreta como si estuviera formada por secciones de longitud ΔS los cuales deben cumplir

$$\Delta S \Delta \theta < \lambda \tag{2.13}$$

Esto significa que no existe un cambio de fase entre dos puntos arbitrarios del mismo segmento ΔS , es decir, los cambios de fase se dan entre dos segmentos diferentes de la fuente. La superposición de franjas de interferencia son generadas por secciones de la fuente S .

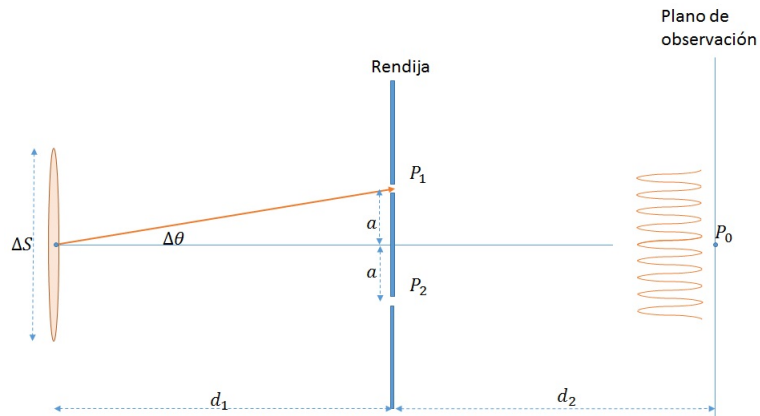


Figura 2.2: Arreglo del interferómetro de Young.

En los interferómetros anteriores, suponemos que la fuente de luz usada es totalmente coherente o en casos extremos luz no coherente, pero en la naturaleza no se puede hablar de casos tan estrictos ya que existen casos intermedios que son los campos parcialmente coherentes.

Finalmente remarcamos que el concepto de la coherencia parcial es de suma importancia en las ramas de la física las cuales envuelven la radiación de los campos magnéticos dependientes de las frecuencias. Por otro lado, cuando se esta en el modelo de coherencia, no se puede hacer un tratamiento como con la teoría electromagnética clásica que es gobernada por las ecuaciones de Maxwell, donde el campo eléctrico E y magnético H son funciones dependientes de la posición y tiempo; por lo que su estudio se puede hacer por medio de una descripción estadística.

Así la teoría de coherencia parcial puede ser descrita por medio de un tratamiento estadístico de la teoría electromagnética. La cual describe el comportamiento de valores

promedio del campo electromagnético. Por esta razón, la teoría de la coherencia parcial es la teoría de una cantidad promedio del campo electromagnético.

Probabilidad de eventos aleatorios

En muchas situaciones físicas, existen resultados de un proceso que no pueden ser predichos de manera determinista, sino que se describen a través de un comportamiento promedio. El estudio implica algunos conceptos de probabilidad y estadística que a continuación se presentan.

El resultado de un experimento, tiene asociado una variable aleatoria. Esta se define como la regla de asociación tal que al resultado de un experimento aleatorio, le asocia un número real que induce una relación de orden. Esto queda ilustrado en el siguiente diagrama.

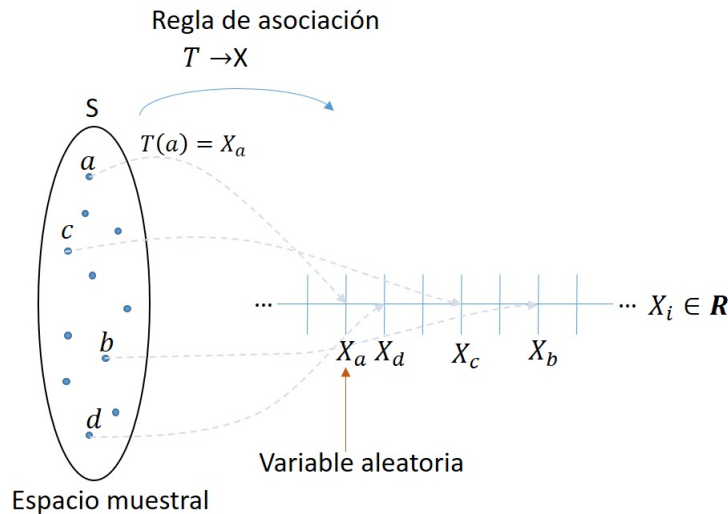


Figura 2.3: Descripción gráfica de una variable aleatoria.

Un proceso estocástico es una variable aleatoria que depende del tiempo, el siguiente esquema lo ejemplifica

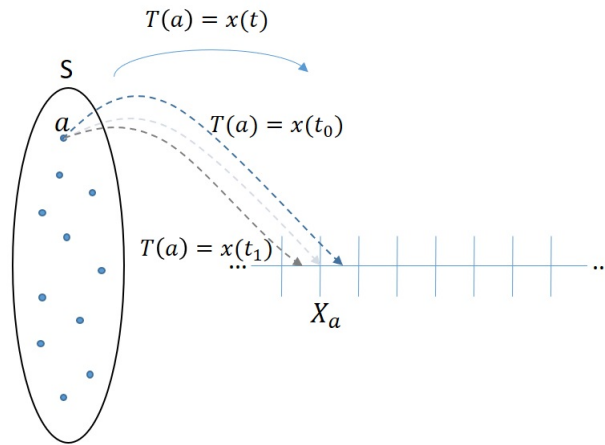


Figura 2.4: Descripción gráfica de variable aleatoria dependiente en el tiempo, llamado proceso estocástico.

Para saber cómo se va a estar comportando un proceso estocástico alrededor de un tiempo t , se puede medir usando la probabilidad

$$\langle x(t) \rangle, \tag{2.14}$$

por otro lado, para saber que tan parecido es un proceso a un tiempo t_0 con otro a un tiempo t_1 , se puede medir la correlación $x(t_0)x^*(t_1)$, y para saber como se está moviendo un punto alrededor de estas correlaciones es

$$\langle x(t_0)x^*(t_1) \rangle, \tag{2.15}$$

esquemáticamente es

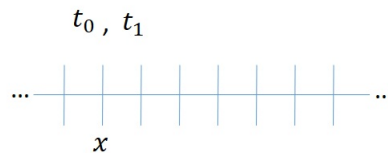


Figura 2.5: Variable aleatoria en distintos tiempos

Lo anterior se puede generalizar tomando la correlación de dos procesos distintos a dos tiempos distintos

$$\langle x_1(t_0)x_2^*(t_1) \rangle \tag{2.16}$$

que se visualiza como

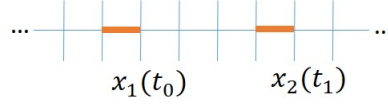


Figura 2.6: Conceptualización de correlación entre dos puntos distintos a tiempos distintos

lo cual muestra qué tanto se parecen las variables aleatorias en un punto x_1 a un tiempo t_0 con otro punto x_2 a un tiempo t_1 . De tal manera que podemos llevar a la analogía del interferómetro de Young con el que se aborda la coherencia espacial, así con las correlaciones a diferentes tiempos medimos las fluctuaciones estadísticas de dos puntos; de este modo, serán parcialmente coherentes por las fluctuaciones que hay por cada tiempo.

2.4 Concepto de coherencia a través de correlaciones

En la sección anterior se definió el promedio de las intensidades en un intervalo de tiempo, ecuación (2.8). En un caso más general, sea ahora el conjunto de resultados de un evento, donde cada $x_i(t)$ es dependiente del tiempo. Entonces el promedio temporal está definido como

$$\langle x_i(t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_i(t) dt. \quad (2.17)$$

En un proceso aleatorio se miden los valores esperados, que consiste de la suma de todo el conjunto de resultados dividido entre el número total de eventos, esto es

$$\langle x_i(t) \rangle_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2.18)$$

cuando el número de pruebas N es muy grande, tenemos

$$\langle x_i(t) \rangle_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t). \quad (2.19)$$

La expresión (2.19) se puede llevar al caso continuo a través de una integral. Para ello se define la *densidad de probabilidad* como $\rho(x, t)$, que representa la probabilidad de que un valor del conjunto de muestras esté en un rango de $(x, x + dx)$ en un tiempo t . De este modo, el valor esperado es

$$\langle x(t) \rangle = \int x \rho(x, t) dx. \quad (2.20)$$

Como la densidad de probabilidad es función de un solo tiempo, no da un correcto comportamiento estadístico de las variables aleatorias, por lo que se necesitan más instantes de tiempos. Así que para caracterizar un proceso aleatorio, uno necesita una secuencia de densidades de probabilidad, esto es

$$p_1(x_1; t_1), p_2(x_1, x_2; t_1, t_2), p_3(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3) \dots \quad (2.21)$$

De este modo tendremos

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \int \int x_1 x_2 \rho(x_1, x_2; t_1, t_2) dx. \quad (2.22)$$

que es de un comportamiento similar para más tiempos.

2.4.1 Funciones de correlación

Para describir un proceso aleatorio, $x(t)$, que varía en el tiempo se puede hacer por medio del *valor promedio*

$$m(t) = \langle x(t) \rangle \quad (2.23)$$

y de su función de autocorrelación (también conocida como función de covarianza)

$$\Gamma(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle. \quad (2.24)$$

Un proceso que es independiente del tiempo t es un proceso estadístico estacionario. Sin embargo, la función de autocorrelación dependerá de dos tiempos t_1 y t_2 , mismos que estarán relacionados a través de la diferencia entre ellos, así definimos $\tau = t_2 - t_1$. Por lo que la ecuación (2.24) se reescribe como

$$\Gamma(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle, \quad (2.25)$$

y cuando se tiene el caso donde τ es fija, tenemos el concepto de "similitud estadística" [14]. El ancho efectivo de $\Gamma(\tau)$ es una medida del tiempo sobre el cual existe la correlación entre $x(t)$ y $x(t + \tau)$. De este modo, el ancho $\Gamma(\tau)$ es una medida precisa del concepto de tiempo de coherencia.

Algunas de las propiedades de la autocorrelación, $\Gamma(\tau)$, son

$$\Gamma(0) \geq 0 \quad (2.26)$$

$$\Gamma(-\tau) = \Gamma(\tau) \quad (2.27)$$

$$\Gamma(\tau) \leq \Gamma(0). \quad (2.28)$$

Notar que la ecuación (2.28) es debido a que en $\Gamma(\tau)$ será máximo cuando $\tau = 0$, por otra parte, con forme τ aumenta, $\Gamma(\tau)$ disminuye porque los valores positivos de $x(t)$ se cancelan por los valores negativos de $x(t + \tau)$.

La función de autocorrelación puede ser aplicada a procesos aleatorios complejos, $z(t)$, de la forma

$$z(t) = x(t) + iy(t). \quad (2.29)$$

De tal manera que la autocorrelación es

$$\Gamma(\tau) = \langle z^*(t)z(t + \tau) \rangle, \quad (2.30)$$

donde el asterísco representa el complejo conjugado de la función. De las propiedades de la correlación, antes mencionadas, las ecuaciones (2.26) y (2.28) se mantienen, pero la ecuación (2.27) se modifica por $\Gamma(-\tau) = \Gamma^*(\tau)$.

La función de autocorrelación puede ser generalizada para dos procesos aleatorios complejos z_1 y z_2 , donde puede ser aplicado a un campo variable en dos puntos P_1 y P_2 en el espacio, tal que [21]

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle z_1^*(t)z_2(t + \tau) \rangle, \quad (2.31)$$

llamando a esta correlación cruzada de funciones.

Sus propiedades son

$$|\Gamma_{12}(\tau)| \leq \sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)} \quad (2.32)$$

y

$$\Gamma_{12}(-\tau) = \Gamma_{21}^*(\tau) \quad (2.33)$$

2.4.2 Autocorrelación de una suma finita con amplitudes aleatorias

Un caso particular de la autocorrelación de funciones, es la suma finita de correlaciones de procesos aleatorios estacionarios [21]. Para ello, sea un conjunto de resultados de un proceso aleatorio complejo

$$z(t) = z_n(t) \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (2.34)$$

donde cada una de las representaciones de $z_n(t)$ es de la siguiente forma [21]

$$z_n(t) = a_1(t)f_1(x, y)e^{i\beta z} + a_2(t)f_2(x, y)e^{i\beta z} + \dots + a_m(t)f_m(x, y)e^{i\beta z} + \dots + a_M(t)f_M(x, y)e^{i\beta z} \quad (2.35)$$

donde a_m son amplitudes aleatorias complejas, tal que el valor promedio de cada amplitud es igual a cero, esto es

$$\langle a_m \rangle = 0 \quad (2.36)$$

lo cual implica que es un proceso estacionario.

De este modo la forma generalizada de la ecuación de autocorrelación, ecuación (2.24), es

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau) &= \langle z^*(t_1)z(t_2) \rangle \\ &= \langle \sum_{m=1}^M a_m^*(t_1)f_m^*(x, y)e^{-i\beta z} \sum_{n=1}^M a_n(t_2)f_n(x, y)e^{i\beta z} \rangle \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \langle a_m^*(t_1)a_n(t_2) \rangle f_m^*(x, y)f_n(x, y) = C(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Donde el valor promedio de los valores cruzados es cero, esto es $\langle a_m^*a_n \rangle = 0$, cuando $n \neq m$, y $C(t_1, t_2)$ se puede acomodar para quedar como la matriz de correlación.

Así, la matriz de correlación tiene la siguiente estructura

$$C(t_1, t_2) = \left\langle \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(t_1)a_0^*(t_2) & a_0(t_1)a_1^*(t_2) & \dots & a_0(t_1)a_M^*(t_2) \\ a_1(t_1)a_0^*(t_2) & a_1(t_1)a_1^*(t_2) & \dots & a_1(t_1)a_M^*(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_M(t_1)a_0^*(t_2) & a_M(t_1)a_1^*(t_2) & \dots & a_M(t_1)a_M^*(t_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0^* \\ f_1^* \\ \vdots \\ f_M^* \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (2.38)$$

De este modo, la matriz ayuda a ver toda la información de la interacción entre todos los procesos.

2.4.3 Coherencia mutua de un campo incoherente

Los parámetros estadísticos descritos en la sección anterior pueden ser trasladados al contexto óptico. Para que haya interferencia, es suficiente con que los campos constituyentes sean estadísticamente similares uno con el otro.

Consideremos un interferómetro de Young que es iluminado con una fuente de luz incoherente Σ , esto es, una fuente primaria emisora de ondas tales que todas ellas son estadísticamente independientes y que después se propagan a lo largo del eje z para atravesar los orificios P_1 y P_2 de una rendija que esta colocada a una distancia d_1 respecto a la fuente Σ , de este modo se generan las franjas de interferencia sobre el plano de observación a una distancia d_2 , como se muestra en la Figura 2.7.

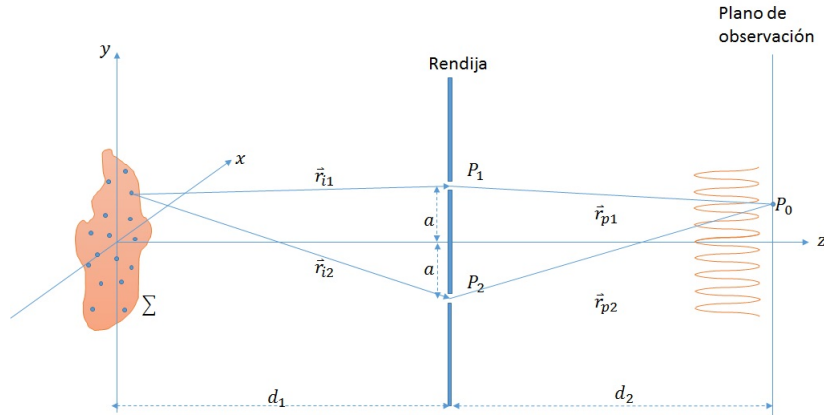


Figura 2.7: Arreglo del interferómetro de Young con una fuente de iluminación incoherente

Donde la estructura de las franjas puede ser caracterizada por la visibilidad ϑ , dada por la intensidad máxima I_{max} y mínima I_{min} , tal como [3]

$$\vartheta = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (2.39)$$

La visibilidad dependerá del tamaño de la fuente. Dando así una interpretación visual de la coherencia espacial.

De lo anterior, se resume que la luz coherente interfiere y la incoherente no. Lo que hace pensar que necesitamos una medida para describir los estados intermedios, que es por medio de la coherencia parcial. Éste puede ser definido como un campo óptico de la forma

$$U(\vec{r}) = \sum_n a_n f_n(\vec{r}), \quad (2.40)$$

donde en general, $\{f_n(\vec{r})\}$, es un conjunto de funciones complejas ortonormales y su conjunto de amplitudes que también pueden ser complejas, $\{a_n\}$, están fluctuando en el tiempo

o son variables aleatorias, tal que en conjunto forman un *campo parcialmente coherente*.

Para poder medir la coherencia de estos campos, de manera general, se definen las funciones $V_1(t)$ y $V_2(t)$ como las perturbaciones complejas del campo óptico en los orificios P_1 y P_2 , respectivamente. Por lo tanto el disturbio total sobre el punto P_0 , es dado por la contribución de P_1 y P_2 , de la siguiente forma

$$V_{p0} = k_1 V_1\left(t - \frac{\vec{r}_{p1}}{c}\right) + k_2 V_2\left(t - \frac{\vec{r}_{p2}}{c}\right) \quad (2.41)$$

con c la velocidad de la luz en el vacío, k_1 y k_2 propagadores independientes del tiempo.

Como vimos en la ecuación (2.6), la irradiancia en el punto P_0 , esta dada por el valor absoluto al cuadrado de V_{p0} [3], quedando

$$|V_{p0}|^2 = I_{p0} = I_1 + I_2 + 2Re\left[\left\langle k_1 V_1\left(t - \frac{\vec{r}_{p1}}{c}\right) k_2^* V_2^*\left(t - \frac{\vec{r}_{p2}}{c}\right) \right\rangle\right] \quad (2.42)$$

considerando k_1, k_2 son independientes del tiempo y que $t = r/c$, podemos reescribir la expresión anterior como

$$I_{p0} = I_1 + I_2 + 2k_1 k_2^* Re\left[\left\langle V_1(t - t_1) V_2^*(t - t_2) \right\rangle\right], \quad (2.43)$$

notando que el término entre corchetes representa la correlación cruzada de dos disturbios, que es función de la diferencia de tiempos $\tau = t_1 - t_2$, y que puede ser simplificada como

$$I_{p0} = I_1 + I_2 + 2k_1 k_2^* Re\left[\left\langle V_1(t - \tau) V_2^*(t) \right\rangle\right]. \quad (2.44)$$

Recordando la ecuación (2.31), donde se describe la correlación cruzada de dos funciones dependientes del tiempo [18], $\Gamma_{12}(\tau) = \left\langle z_1^*(t) z_2(t + \tau) \right\rangle$, la intensidad en el punto P_0 sobre el plano de observación se escribe

$$I_{p0} = I_1 + I_2 + 2k_1 k_2^* Re[\Gamma_{12}(\tau)], \quad (2.45)$$

donde $\Gamma_{11}(\tau)$ y $\Gamma_{22}(\tau)$ son las intensidades en los orificios P_1 y P_2 , respectivamente. Retomando la ecuación (2.32), se halla el grado complejo de coherencia, esto es

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} \quad (2.46)$$

que finalmente normalizando y sustituyendo en la expresión de la irradiancia del punto P_0 , llegamos a

$$I_{p0} = I_1 + I_2 + 2k_1k_2^*Re[\gamma_{12}(\tau)], \quad (2.47)$$

que representa el grado complejo de coherencia en la expresión de la irradiancia, como función de las correlaciones de los campos sobre los orificios P_1 y P_2 del interferómetro de Young. Así, el comportamiento en conjunto, se ve como una envolvente de probabilidad de correlaciones.

Hasta este punto, se han definido procesos que son estacionarios tanto espacial como temporalmente, sin embargo, existen campos que no cumplen con esta hipótesis, es decir, que no son estacionarios. Una forma de analizarlos es usando modelos probabilísticos que en la siguiente sección se describen.

2.5 Soporte teórico de variables aleatorias y probabilidad

Como se mencionó en la sección anterior, la teoría de probabilidad esta enfocada al estudio de métodos para el análisis de procesos aleatorios. El saber como describir el espacio de un evento aleatorio es importante puesto que proporciona un medio para definirlo.

La probabilidad esta basada en la frecuencia relativa de un suceso. Sea por ejemplo, un evento aleatorio E , que es un elemento del conjunto de resultados llamado *el conjunto de eventos seguros* S , es decir, que este será el conjunto que contiene todos los resultados que siempre existirán en un experimento, por otra parte, también se desprende el *evento nulo* \emptyset , que es el que nunca es posible que resulte de un experimento. Entonces si en un gran número de ensayos independientes, N , el evento E aparece n veces, se asigna un número real positivo llamado *probabilidad de ocurrencia*, que se define como

$$p(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}. \quad (2.48)$$

De este modo, las probabilidades del conjunto de resultados S , donde $S = \{A, B, C, D, E, \dots\}$, es $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(D)$, $p(E)$,.... Las propiedades de la probabilidad de un evento $p(E)$, son

1.

$$p(E) \geq 0, \quad (2.49)$$

donde los valores de probabilidad serán siempre positivos,

2.

$$p(S) = 1, \quad (2.50)$$

la probabilidad del conjunto total de eventos siempre será la unidad.

3. Finalmente, si A, B, C, D, E, \dots son eventos mutuamente excluyentes, tenemos que

$$p(A + B + C + D + E + \dots) = p(A) + p(B) + p(C) + p(D) + p(E) + \dots \quad (2.51)$$

De las ecuaciones (2.49) y (2.50), se desprende que cualquier valor de probabilidad, se encuentra en el intervalo de valores de 0 y 1, esto es

$$0 \leq p(E) \leq 1. \quad (2.52)$$

Así que, la suma de todas las probabilidades de estos eventos es siempre la unidad, tal que

$$\sum_{i=1}^N p(A_i) = p\left(\sum_{i=1}^N A_i\right) = p(S) = 1. \quad (2.53)$$

Sin embargo, si consideramos a los eventos A y B como conjuntos, puede existir una intersección entre ellos, debido a eventos compuestos por la composición de otros eventos, a estos se les conoce como *probabilidad conjunta* y se escriben como $p(A, B)$. Donde se cumple que $p(A, B) \leq p(A)$ y $p(A, B) \leq p(B)$, que significa que la probabilidad conjunta es menor o igual que la probabilidad de un solo evento [14].

2.5.1 Teorema de Bayes

La probabilidad de un evento A condicionado por otro evento B , es denotada como la *probabilidad condicional* de A dado B o también conocido como *Teorema de Bayes*, que se escribe como

$$P(A|B) = \frac{p(A, B)}{p(B)}. \quad (2.54)$$

Como se mencionó antes, los valores de la probabilidad condicional se encuentran en el intervalo de 0 y 1, esto es

$$0 \leq P(A|B) \leq 1, \quad (2.55)$$

y por lo tanto se cumple que

$$\sum_{i=1}^N P(A_i|B) = 1. \quad (2.56)$$

Como A y B son eventos independientes, entonces la probabilidad conjunta de A y B se escribe como

$$p(A, B) = p(A)p(B). \quad (2.57)$$

La forma general para N eventos A_1, A_2, \dots, A_N estadísticamente independientes es que se pueden escribir de la siguiente forma

$$p(A_1, A_2, \dots, A_N) = p(A_1)p(A_2)\dots p(A_N). \quad (2.58)$$

Podemos aplicar lo anterior a un caso simple por medio de una ejemplo.

Ejemplo

Sean dos haces, haz A y haz B , tal que se propagan de forma paralela y frente a ellos se encuentra un detector C que medirá la contribución de cada uno de esos haces, tal que c y c^* son los valores de probabilidad de que los haces A y B sean detectados.

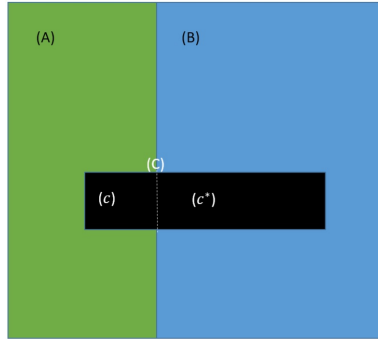


Figura 2.8: Ejemplo de aplicación del Teorema de Bayes

El haz A tiene una probabilidad de contribuir sobre el sistema $p(A) = 40\%$ y el haz B tiene una probabilidad de contribuir sobre el sistema $p(B) = 60\%$. Por otro lado, A tiene la probabilidad de ser medido por c $p(c) = 15\%$ y B tiene la probabilidad de ser medido por c^* $p(c^*) = 6\%$, donde $p(C) = p(c, A) + p(c^*, B)$, tal que la probabilidad conjunta toma la siguiente forma

$$P(C) = p(c)p(A) + p(c^*)p(B). \quad (2.59)$$

Así, la probabilidad de que el haz \mathbf{A} sea medido por el detector \mathbf{C} , usando el Teorema de Bayes, es

$$P(A|c) = \frac{p(A, c)}{p(C)} \quad (2.60)$$

por otro lado, haciendo el caso contrario, donde la probabilidad de que el detector \mathbf{C} mida a \mathbf{A} , por Teorema de Bayes, es

$$P(c|A) = \frac{p(A, c)}{p(A)} \quad (2.61)$$

donde se obtiene la siguiente relación

$$P(A|c) = \frac{P(c|A)p(A)}{p(C)} \quad (2.62)$$

que muestra la dependencia con su probabilidad inversa.

Del mismo modo, haremos para el caso en que el haz \mathbf{B} es medido por el detector \mathbf{C}

$$P(B|c^*) = \frac{p(B, c^*)}{p(C)} \quad (2.63)$$

y la probabilidad de que el detector \mathbf{C} mida a \mathbf{B}

$$P(c^*|B) = \frac{p(B, c^*)}{p(B)}, \quad (2.64)$$

combinando las dos relaciones anteriores, tenemos que

$$P(B|c^*) = \frac{P(c^*|B)p(B)}{p(C)}. \quad (2.65)$$

que es la dependencia con su probabilidad inversa.

Sustituyendo los valores de probabilidad mencionados anteriormente en las ecuaciones (2.60) y (2.63), tenemos

$$P(A|c) = \frac{(.4)(.15)}{(.15)(.4) + (.06)(.6)} = 0.625 \quad (2.66)$$

$$P(B|c^*) = \frac{(.6)(.06)}{(.15)(.4) + (.06)(.6)} = 0.375 \quad (2.67)$$

De este modo se verifica que la suma de las probabilidades condicionales por parte del haz \mathbf{A} y el haz \mathbf{B} cumplen con la condición de probabilidad, ecuación (2.56), esto es

$$P(A|c) + P(B|c^*) = 1. \quad (2.68)$$

2.6 Definición de procesos estocásticos

Como se esquematizó en la Figura 2.4, un proceso estocástico es un proceso aleatorio que evoluciona en el tiempo. De acuerdo a [13], un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias X_t con subíndice que refiere al tiempo. Donde el tiempo será un subconjunto de los enteros positivos $\{0, 1, 2, \dots\}$, llamados procesos discretos en el tiempo, o un subconjunto de los reales positivos $[0, \infty)$ que son los procesos continuos en el tiempo. Las variables aleatorias de X_t toman valores de un conjunto al que llamamos *espacio de estados*.

2.7 Procesos de Markov

El estudio de procesos deterministas, es decir procesos no aleatorios, que cambian con el tiempo pueden ser descritos por funciones de la forma $y(t)$. El cambio de la función $y(t)$ depende de las variaciones del tiempo t , donde no se consideran los valores anteriores a t . Los procesos estocásticos que tienen la propiedad de que el cambio en el tiempo t esta determinado por los valores del proceso en el tiempo t y no por los valores en tiempos anteriores de t , se les conoce como *Procesos de Markov*. Una forma de analizarlos, es por medio del algebra lineal [13].

2.7.1 Cadenas de Markov

Sea un proceso estocástico discreto en el tiempo, X_n , con $n = 0, 1, 2, \dots$, donde X_n toma valores del conjunto finito $S = \{0, \dots, N - 1\}$; llamando a los posibles valores para X_n los estados del sistema. Para describir las probabilidades para tales procesos, necesitamos dar los valores de la probabilidad conjunta, tal como en la ecuación (2.58), esto es

$$p(X_0, X_1, \dots, X_n), \quad (2.69)$$

donde X_t toma los valores del conjunto de estados $\{i_0, i_1, \dots, i_n\}$ y los valores de la probabilidad inicial del sistema son

$$p(X_0 = i), i = 1, \dots, N \quad (2.70)$$

la *transición de probabilidad* tiene la siguiente forma

$$P(X_n | X_{n-1}, \dots, X_0), \quad (2.71)$$

para así tener la descripción de probabilidades como

$$p(X_0, X_1, \dots, X_n) = P(X_n|X_{n-1}, \dots, X_0) \dots P(X_2|X_1, X_0)P(X_1|X_0)p(X_0). \quad (2.72)$$

notar que la $p(X_0 = i)$ es el vector inicial de probabilidades.

Los estados con propiedad Markoviana hacen predicciones del comportamiento de un sistema en el futuro, para ello, consideran solo el estado presente del sistema y no la historia pasada [17]. Esto es, que el estado presente del sistema es importante y no la manera en que llegó a ese estado, matemáticamente se describe como

$$P(X_n|X_{n-1}, \dots, X_0) = P(X_n|X_{n-1}). \quad (2.73)$$

La expresión (2.73) es conocida como *cadena de Markov*, estas cadenas son sistemas sin memoria del pasado. Si las probabilidades no dependen del tiempo, se le llama homogeneidad temporal y se tiene una *cadena de Markov homogénea en el tiempo* tal que

$$P\{X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\} = p(i_n, i_{n-1}), \quad (2.74)$$

por lo que se llamará *Cadena de Markov* cuando nos refiramos a cadenas de Markov homogéneas en el tiempo. Para dar las probabilidades para una cadena de Markov, se necesita dar la distribución inicial de probabilidades $p(X_0 = i)$ y la transición de probabilidades $p(i, j)$, esto es

$$p(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p(i_n, i_{n-1}) \dots = p(i_2, i_1)p(i_1, i_0)p(i_0). \quad (2.75)$$

De lo anterior, notamos que la matriz de transición P para una cadena de Markov es una matriz de $N \times N$ cuyas (i, j) entradas $P_{i,j}$ son $p(i, j)$. Donde $p(i, j)$ es la probabilidad condicional de que la cadena de Markov esté en el tiempo t en el estado j , dado que en el tiempo $t - 1$ estuvo en el estado i [17].

Así, la transición de probabilidades $P(i, j)$ de una cadena de Markov con N estados se puede presentar en forma matricial

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) & \dots & P(0,N-1) & P(0,N) \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & \dots & P(1,N-1) & P(1,N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(N-1,0) & P(N-1,1) & P(N-1,2) & \dots & P(N-1,N-1) & P(N-1,N) \\ P(N,0) & P(N,1) & P(N,2) & \dots & P(N,N-1) & P(N,N) \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

De este modo, la matriz estocástica \mathbf{P} es

$$0 \leq \mathbf{P}_{i,j} \leq 1, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (2.77)$$

para así tener

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{P}_{i,j} = 1, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.78)$$

es decir, este tipo de matrices satisfacen que la suma de las probabilidades de los renglones es igual a 1.

Capítulo 3

Campos ópticos con estructura Markoviana

Existen campos ópticos que presentan una relación de orden que no es estacionaria. En particular nos referimos a los campos con estructura markoviana que presentan una variabilidad en la estructura óptica, siguiendo un comportamiento ordenado que a su vez es característico de los procesos de entropía. Por lo tanto, para poder relacionar los procesos ordenados con campos ópticos, es preciso analizar la teoría de modos.

3.1 Teoría de modos

En secciones anteriores se representó la función de onda real como en la ecuación (2.3), pero es conveniente representar la función de onda en una manera más general, esto es en términos de una función compleja, tal como

$$U(\vec{r}, t) = a(\vec{r})e^{i(\omega t + \phi(\vec{r}))}, \quad (3.1)$$

donde la amplitud y fase son función de la posición, $\vec{r} = (x, y, z)$, en que se encuentre la onda en cierto tiempo. Por otro lado, la onda se puede escribir si se toma en su forma real

$$u(\vec{r}, t) = \mathbf{Re}\{U(\vec{r}, t)\} \quad (3.2)$$

o cuando se toma como un medio de la suma de ella con su conjugada

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\{U(\vec{r}, t) + U^*(\vec{r}, t)\}, \quad (3.3)$$

separando la parte temporal y espacial, la función de onda compleja se puede escribir

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{i\omega t}, \quad (3.4)$$

de esta manera se tiene que la amplitud de la función de onda contendrá los términos espaciales, mientras que la fase solo la dependencia temporal, además de ser solución a la ecuación de onda.

A la ecuación (3.5) se le conoce como "Amplitud Compleja"

$$U(\vec{r}) = a(\vec{r})e^{i\phi(\vec{r})}. \quad (3.5)$$

Al aplicar la función de onda compleja a la ecuación de onda, esto es

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.6)$$

tenemos que,

$$\nabla^2 U(\vec{r})e^{i\omega t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\vec{r})e^{i\omega t} = 0, \quad (3.7)$$

donde desarrollando los términos, se obtiene

$$e^{i\omega t} \nabla^2 U(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} U(\vec{r})e^{i\omega t} = 0, \quad (3.8)$$

y simplificando la expresión anterior, llegamos a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 U(\vec{r}) + K^2 U(\vec{r}) = 0, \quad (3.9)$$

con $K = \frac{\omega}{c}$, el número de onda. Así se tiene que la amplitud compleja $U(\vec{r})$ es solución de la ecuación de Helmholtz.

Por otro lado, podemos reescribir la ecuación de Helmholtz, ecuación (3.9), como

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} U(\vec{r}) + (\nabla_{\perp}^2 + K^2) U(\vec{r}) = 0 \quad (3.10)$$

donde se han separado los términos del Laplaciano transversal

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

se nombra al operador \hat{A}^2 que reúne el Laplaciano transversal y el número de onda de la siguiente manera

$$\hat{A}^2 = \nabla_{\perp}^2 + K^2, \quad (3.11)$$

$$\widehat{A} = \sqrt{\nabla_{\perp}^2 + K^2}. \quad (3.12)$$

Finalmente la ecuación de Helmholtz se escribe en términos de la segunda derivada respecto al eje z y un operador espacial aplicado a la función de onda

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} U(\vec{r}) + \widehat{A}^2 U(\vec{r}) = 0, \quad (3.13)$$

de tal modo que la solución de esta nueva ecuación mantiene la forma de una onda propagándose a lo largo del eje z , con la diferencia de tener un operador en la fase

$$U(x, y, z) = f(x, y) e^{i\widehat{A}z}. \quad (3.14)$$

si reescribimos la ecuación (3.13) de forma explícita, tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y) e^{i\widehat{A}z} + \widehat{A}^2 f(x, y) e^{i\widehat{A}z} = 0. \quad (3.15)$$

Notar que la nueva solución, ecuación (3.14), tiene una función arbitraria $f(x, y)$ y que la exponencial se puede reescribir como una sumatoria de la forma $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, así tenemos

$$U(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} \widehat{A}^n f(x, y). \quad (3.16)$$

Dado que la amplitud, $f(x, y)$, es arbitraria, restringimos sus soluciones a las funciones que son funciones propias de \widehat{A} , esto es

$$\begin{aligned} \widehat{A}f &= \beta f \\ \widehat{A}^2 f &= \beta^2 f \\ &\vdots \\ \widehat{A}^n f &= \beta^n f, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde vemos que f es una función propia del operador \widehat{A} y su valor propio asociado es β . Así n veces aplicado el operador sobre la función propia es igual a n veces el eigen valor por la función propia. De tal manera que la solución 3.16 se escribe como

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} \beta^n f(x, y) \\ &= e^{i\beta z} f(x, y). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Usando la expresión (3.17), con $n = 2$, se tiene

$$\widehat{A}^2 f(x, y) = \beta^2 f(x, y), \quad (3.19)$$

y recordando la forma que tiene \widehat{A}^2 , ecuación (3.11), se llega a

$$\widehat{A}^2 f(x, y) = (\nabla_{\perp}^2 + K^2) f(x, y) = \beta^2 f(x, y). \quad (3.20)$$

De la cual se desprende

$$\nabla_{\perp}^2 f(x, y) + K^2 f(x, y) = \beta^2 f(x, y), \quad (3.21)$$

reacomodando términos, tenemos

$$\nabla_{\perp}^2 f(x, y) + (K^2 - \beta^2) f(x, y) = 0, \quad (3.22)$$

donde ésta última es una ecuación equivalente a la ecuación de Helmholtz.

Así, un modo óptico es una solución exacta a la ecuación de Helmholtz, (3.9), con $U(x, y, z)$ de la forma

$$U(x, y, z) = e^{i\beta z} f(x, y), \quad (3.23)$$

donde la función $f(x, y)$, satisface la ecuación de eigenvalores

$$\nabla_{\perp}^2 f(x, y) + (K^2 - \beta^2) f(x, y) = 0. \quad (3.24)$$

Por otro lado, si a la ecuación (3.24), le aplicamos transformada de Fourier, esto es

$$\mathcal{F}\{\nabla_{\perp}^2 f(x, y) + (K^2 - \beta^2) f(x, y)\} = 0 \quad (3.25)$$

con la definición de Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy = F(u, v) \quad (3.26)$$

y usando la propiedad

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y)\right\} = (i2\pi u)^n F(u, v) \quad (3.27)$$

la expresión (3.25)

$$(i2\pi u)^2 F(u, v) + (i2\pi v)^2 F(u, v) + (K^2 - \beta^2) F(u, v) = 0$$

$$-4\pi^2(u^2 + v^2) F(u, v) + (K^2 - \beta^2) F(u, v) = 0$$

queda como

$$\left[u^2 + v^2 - \frac{(K^2 - \beta^2)}{4\pi^2}\right] F(u, v) = 0. \quad (3.28)$$

Esta última, es la representación en el espacio de frecuencias de la expresión (3.24), donde u, v son las frecuencias espaciales y $F(u, v)$ es la trasformada de Fourier de una función arbitraria. Notar que tenemos $u^2 + v^2$, que representa una geometría circular sobre el plano de frecuencias, mismo que puede verse por sectores que caen sobre el anillo, por lo tanto se puede representar por medio de una delta de Kronecker, así la ecuación (3.28), queda como

$$F(u, v)\delta\left(u^2 + v^2 - \frac{(K^2 - \beta^2)}{4\pi^2}\right) = 0, \quad (3.29)$$

haciendo

$$\frac{(K^2 - \beta^2)}{4\pi^2} = d^2,$$

tenemos

$$F(u, v)\delta(u^2 + v^2 - d^2) = 0, \quad (3.30)$$

donde la función delta tiene sentido cuando

$$u^2 + v^2 - d^2 = 0.$$

Entonces, la distribución de amplitudes en el campo óptico de la ecuación (3.30), se puede obtener usando el modelo del espectro angular [15], mismo que tiene la forma de

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} T(u, v)e^{-i\pi\lambda z(u^2+v^2)}e^{i2\pi(xu+yv)}dudv \quad (3.31)$$

así, el campo a propagar en el espacio de frecuencias es

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v)\delta(u^2 + v^2 - d^2)e^{-i\pi\lambda z(u^2+v^2)}e^{i2\pi(xu+yv)}dudv. \quad (3.32)$$

Como $u^2 + v^2 = d^2$, y bajo la condición de frecuencias $u^2 + v^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ debido a la simetría, podemos tomar solo la parte positiva de esta forma, encontramos que la fase del propagador es $\beta = \pi d$, por lo que la integral anterior queda como

$$U(x, y, z) = e^{i\beta z} \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v)\delta(u^2 + v^2 - d^2)e^{i2\pi(xu+yv)}dudv. \quad (3.33)$$

Haciendo el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} u &= \rho \cos(\phi), & x &= r \cos(\theta) \\ v &= \rho \sin(\phi), & y &= r \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.34)$$

la ecuación (3.33) se escribe como

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} \iint F(\rho, \phi) \delta(\rho^2 - d^2) e^{i2\pi(r \cos(\theta)\rho \cos(\phi) + r \sin(\theta)\rho \sin(\phi))} \rho d\rho d\phi, \quad (3.35)$$

y evaluando la delta en $\rho = d$, tenemos

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} d \int F(\rho, \phi) e^{i2\pi r d (\cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi))} d\phi, \quad (3.36)$$

simplificando la expresión anterior, llegamos a

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} d \int F(\rho, \phi) e^{i2\pi r d \cos(\theta - \phi)} d\phi. \quad (3.37)$$

Por otro lado, una expresión importante para órdenes enteros es la identidad de Jacobi-Anger [1]:

$$e^{ix \cos(y)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) e^{iny} \quad (3.38)$$

tal que si reescribimos la ecuación (3.37), en términos de funciones Bessel, es

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} d \int F(\rho, \phi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2\pi r d) e^{in(\theta - \phi)} d\phi, \quad (3.39)$$

reagrupando términos

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2\pi r d) e^{in\theta} \int i^n dF(\rho, \phi) e^{-in\phi} d\phi, \quad (3.40)$$

de ésta forma, el término de la integral representa los coeficientes complejos de la modulación de las amplitudes de la función del campo, nombrando estas amplitudes, α_n :

$$\alpha_n = \int i^n dF(\rho, \phi) e^{-in\phi} d\phi. \quad (3.41)$$

Finalmente, podemos simplificar la expresión del campo como

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2\pi r d) e^{in\theta} \alpha_n, \quad (3.42)$$

donde ésta última expresión, es un modo que se puede escribir como una combinación lineal de funciones Bessel con amplitudes complejas.

Por otro lado, es preciso resaltar que la irradiancia se puede ver como la correlación de dos funciones, así la estructura de la irradiancia, ecuación (2.6), se complementa con la estructura de la correlación, ecuación (2.37), de tal manera que tendremos

$$I(r, \theta, z) = |U(r, \theta, z)|^2 = U(r, \theta, z) U^*(r, \theta, z)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(e^{i\beta z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2\pi r d) e^{in\theta} \alpha_n \right) \left(e^{i\beta z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(2\pi r d) e^{im\theta} \alpha_m \right)^* \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_n \alpha_m^* J_n(2\pi r d) J_m^*(2\pi r d) e^{in\theta} e^{-im\theta}, \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

donde esta última, es la distribución de irradiancias de un modo. Sin embargo, como se mencionó en el capítulo 2 en la ecuación (2.9), dado que la amplitud es una variable aleatoria estadísticamente independiente, se calcula el valor promedio de las intensidades en un rango de $[0, M]$, esto es

$$\begin{aligned}
 \langle I(r, \theta, z) \rangle &= \langle U(r, \theta, z) U^*(r, \theta, z) \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^M \alpha_n \alpha_m^* J_n(2\pi r d) J_m^*(2\pi r d) e^{in\theta} e^{-im\theta} \right\rangle \\
 &= \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^M \langle \alpha_n \alpha_m^* \rangle J_n(2\pi r d) J_m^*(2\pi r d) e^{in\theta} e^{-im\theta} \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

tal que la ecuación (3.44), muestra una correlación de amplitudes que existen en la irradiancia promedio y que a su vez, puede ser reescrita en su forma matricial de forma análoga a la ecuación (2.38),

$$C(\phi) = \begin{pmatrix} J_0 & J_1 & \dots & J_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_0 a_0^* \rangle & \langle a_0 a_1^* \rangle & \dots & \langle a_0 a_M^* \rangle \\ \langle a_1 a_0^* \rangle & \langle a_1 a_1^* \rangle & \dots & \langle a_1 a_M^* \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle a_M a_0^* \rangle & \langle a_M a_1^* \rangle & \dots & \langle a_M a_M^* \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0^* \\ J_1^* \\ \vdots \\ J_M^* \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Cada término de la matriz $\langle a_n a_m \rangle$ describe la interacción entre los elementos de la base, es decir, cada $a_n a_m$ representa la fracción de energía que se transfiere del modo con orden n Bessel al modo con orden m Bessel.

En el caso clásico, es decir, de procesos estacionarios tenemos correlaciones de la forma

$$\Gamma_{nm}(t_1 - t_2), \tag{3.46}$$

sin embargo, en el caso de no estacionarios, los procesos son dependientes del tiempo. Por lo tanto, para relacionar la correlación de amplitudes con la coherencia parcial, notamos que la modulación de amplitudes es dependiente del tiempo, esto es

$$\alpha_n = \alpha_n(\phi, t) = \int G(\phi) e^{-in\phi} d\phi \tag{3.47}$$

de tal manera que el valor esperado de la correlación de las amplitudes toma la forma de la ecuación (2.22), esto es

$$\langle \alpha_n(t_1) \alpha_m^*(t_2) \rangle = \iint G(\phi) G'(\phi) e^{-in\phi} e^{im\phi} \rho(G, G'; t_1, t_2) d\phi, \quad (3.48)$$

donde $\rho(G, G'; t_1, t_2)$ es la densidad de probabilidad conjunta.

De lo anterior, es visible un comportamiento probabilístico por parte de la modulación de amplitudes. Por lo tanto, se implementa un modelo de procesos estocásticos que permita controlar los coeficientes de las amplitudes. Para ello, se propone utilizar las cadenas de tipo Ehrenfest que son un caso particular de las cadenas de Markov y que además presentan una convergencia en su evolución, misma que se describe en la siguiente sección.

3.2 Cadenas de Markov tipo Eherenfest

El modelo Ehrenfest, fue propuesto por Paul y Tatiana Eherenfest en 1907, y de forma ilustrativa muestra el intercambio de calor entre dos cuerpos aislados. El modelo consiste de r partículas que están distribuidas en dos distintos contenedores, una urna blanca y una urna negra. Después de una serie de intercambios presentados, en cada prueba, una partícula es seleccionada de manera aleatoria y movida de esa urna para ubicarla en la otra. El estado del sistema en el n movimiento esta dado por W_n , que representa el número de partículas en la urna blanca en el movimiento n . El proceso W_n forma una cadena de Markov sobre el espacio $\{0, 1, 2, \dots, r\}$ y es llamada cadena de Eherenfest [9].

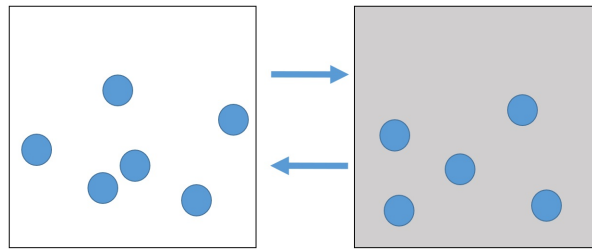


Figura 3.1: Modelo de Ehrenfest: intercambio de r partículas de una urna blanca a una negra.

Las cadenas de tipo Eherenfest se representan por medio de una matriz de transición de los n estados de la cadena de Markov, mismos que definirán las dimensiones de

una matriz cuadrada. Para darle estructura, son necesarios los valores de probabilidad p y q del sistema. Un ejemplo para el modelo anterior, es el que se describe a continuación.

3.2.1 Matriz de transición tipo Eherenfest

Para este modelo, se tienen dos urnas, una A y otra B , con r pelotitas no distinguibles distribuidas entre ellas de tal manera que siempre exista al menos una pelotita en cada urna. Por otro lado, se definen cuatro estados, $X_n = 0$ que significa que la pelotita se queda en la urna de donde se toma aleatoriamente, $X_n = 1$ que la pelotita se ha movido a la otra urna, $X_n = 2$ que la pelotita regrese a la urna en que estaba y $X_n = 3$ no regrese a la urna en que estaba. Además, se asume que durante cada intervalo de tiempo, hay una probabilidad p de que pase una pelotita a otra caja y que también en un intervalo de tiempo, una pelotita tiene la probabilidad q de ser seleccionada. Definiendo $p = \gamma$ y $q = \frac{1}{r-1}$.

Así como se mencionó en la ecuación (2.76), la matriz de transición de probabilidades de una cadena de Markov con cuatro estados, es

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X_n \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} X_n \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) & P(0,3) \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & P(1,3) \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) & P(2,3) \\ P(3,0) & P(3,1) & P(3,2) & P(3,3) \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (3.49)$$

donde la probabilidad de una pelotita que pase o no a otra urna es

$$P(0,0) = 1 - p \quad P(0,1) = p \quad P(0,2) = 0 \quad P(0,3) = 0.$$

La probabilidad de que una pelotita sea seleccionada y esta pase es $P(1,0) = pq$, la probabilidad de que pueda ser movida y regrese a la urna a la que pertenece es $P(1,2) = p(1 - q)$, y la probabilidad de que no regrese es $P(1,3) = 0$, de tal manera que la suma de todas las probabilidades es 1, entonces se tiene que $P(1,1) = (1 - p)q + (1 - q)(1 - p)$.

Así, las entradas de probabilidad que describen cada estado se acomodan en la

matriz de transición, teniendo la siguiente estructura

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ pq & (1-p)q + (1-q)(1-p) & p(1-q) & 0 \\ 0 & (1-p)(1-q) & pq + p(1-q) & (1-p)q \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Esta matriz de transición da la información general de los cuatro estados de las cadenas de Markov que indican como fue el intercambio de pelotitas entre las dos urnas. Para conocer la evolución de esta matriz de transición, es necesario un vector inicial con las condiciones iniciales del sistema.

3.2.2 Evolución de las matrices de transición tipo Eherenfest

Dada la matriz de transición tipo Eherenfest \mathbf{P} y la distribución inicial de probabilidades α , es decir un vector de la forma

$$\vec{\alpha}_n = (\alpha_n(1), \alpha_n(2), \dots, \alpha_n(N)), \quad (3.51)$$

tal que sus entradas sean positivas y la suma de ellas sea uno, es decir

$$\sum_{i=0}^N \alpha_n(i) = 1, \quad (3.52)$$

se puede determinar la evolución del sistema en un n -ésimo tiempo. Por ejemplo, conociendo el vector inicial, tendríamos la siguiente expresión para el primer tiempo

$$\vec{\alpha}_0 \mathbf{P} = \vec{\alpha}_1, \quad (3.53)$$

para un segundo tiempo

$$\vec{\alpha}_1 \mathbf{P} = \vec{\alpha}_2, \quad (3.54)$$

sustituyendo α_1 en la expresión (3.54), se tiene

$$\vec{\alpha}_0 \mathbf{P}^2 = \vec{\alpha}_2,$$

de manera similar, para un tercer tiempo

$$\vec{\alpha}_0 \mathbf{P}^3 = \vec{\alpha}_3,$$

tal que para el n -ésimo tiempo, se tiene

$$\vec{\alpha}_0 \mathbf{P}^n = \vec{\alpha}_n. \quad (3.55)$$

Así, la ecuación (3.55) muestra el comportamiento de la matriz de probabilidad de las cadenas de Markov tipo Eherefest y la distribución del vector de salida en el n -ésimo tiempo cuando se conoce el vector de las condiciones iniciales. Donde el valor de la matriz de transición a la n -ésima potencia, \mathbf{P}^n , se obtiene diagonalizando, así que

$$P^n = DL^n D^{(-1)}. \quad (3.56)$$

Una manera de medir el intercambio de información que existió en el vector de salida $\vec{\alpha}_n$, dada la matriz de transición \mathbf{P}^n , es por medio de la entropía de Von Neumann, mismo que se describe en la siguiente sección.

3.3 Entropía de información o entropía de Von Neumann

La entropía de Von Neumann es una unidad de medida de la información de un proceso. Parte de cuantificar la información obtenida al tener conocimiento de la ocurrencia de un proceso, o de manera equivalente, la incertidumbre sobre el acontecimiento antes de que ocurra.

La entropía de Von Neumann se define como en [2]:

$$S = - \sum_{i=1}^N \alpha_i \ln(\alpha_i) \quad (3.57)$$

donde se mide el intercambio de información de N interacciones.

En particular, la entropía de Von Neumann será la herramienta con la que se medirá la cantidad de información que se intercambié en el vector de probabilidad de salida después de N interacciones a través de la matriz de transición, dado un vector de probabilidad inicial.

De lo anterior, una de las características que cumple el vector de probabilidad a la salida de la evolución del sistema es

$$\alpha_i \in (0, 1]. \quad (3.58)$$

Por otro lado, analizando la ecuación (3.57), de todo el conjunto de valores de la función $\ln(\alpha)$, se considera el dominio en $\alpha \in (0, 1]$, puesto que se empatan éstos valores con las probabilidades de los coeficientes de salida de las cadenas de Markov tipo Eherenfest, resultado de la evolución del sistema después de N tiempos.

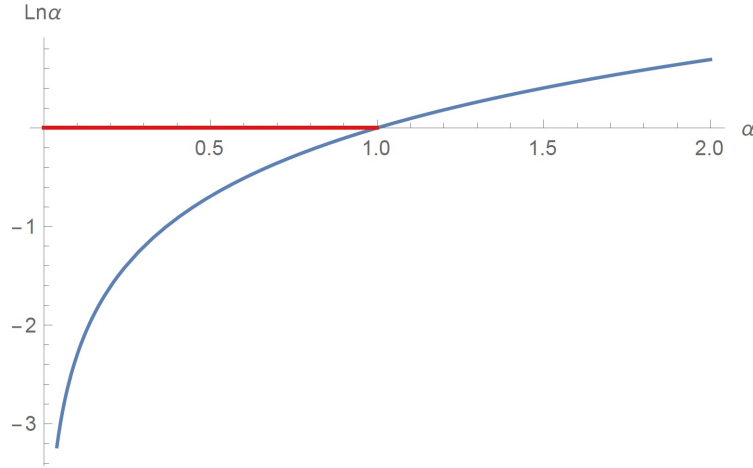


Figura 3.2: Función del logaritmo natural, $\text{Ln}(x)$, con línea azul. La línea roja representa el intervalo donde se hallan los valores de probabilidad de los coeficientes resultantes de las cadenas de Markov

Así, en la Figura 3.2, se muestra con la línea roja el intervalo de interés para analizar la entropía de Von Neumann.

Como se quiere saber el comportamiento de la función

$$s(\alpha) = -\alpha \ln(\alpha). \quad (3.59)$$

se calculan los máximos de la función, para ello se deriva una vez y se iguala a cero

$$\frac{ds(\alpha)}{d\alpha} = 0, \quad (3.60)$$

que resulta

$$\frac{ds(\alpha)}{d\alpha} = -(1 + \ln(\alpha)) = 0, \quad (3.61)$$

despejando para α

$$\ln(\alpha) = -1 \quad (3.62)$$

tenemos

$$\alpha = \frac{1}{e}. \quad (3.63)$$

Dado que se quiere saber si corresponde a un máximo o mínimo derivamos por segunda vez la función (3.59)

$$\frac{d^2s(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}, \quad (3.64)$$

y sustituyendo $\alpha = \frac{1}{e}$, se encuentra que

$$-\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e < 0 \quad (3.65)$$

que es un valor menor que cero, por lo que indica que es un máximo y el comportamiento de la entropía en el intervalo $(0, 1]$, es tal como se muestra en la siguiente gráfica.

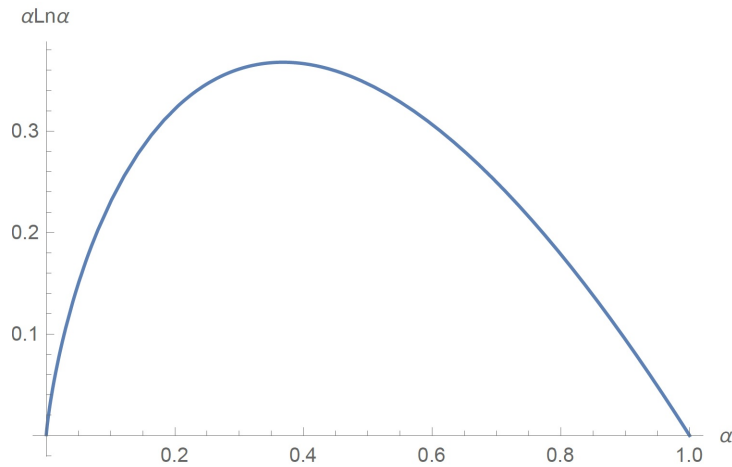


Figura 3.3: Función de entropía $s(\alpha) = -\alpha \ln(\alpha)$

La Figura 3.3, muestra gráficamente el comportamiento de la entropía en un intervalo donde caen todos los valores de los coeficientes de probabilidad, resultados de la evolución del vector inicial, a través de las cadenas de Markov.

El sentido físico de la entropía de Von Neumann, ecuación (3.57), será el saber cuánto intercambio de información hubo conociendo su entropía. Esto es, habrá una máxima información del intercambio del sistema cuando se encuentre que la entropía es mínima. Por ejemplo, si $\alpha_i = 0$, no da información del sistema por que $\ln(\alpha_i)$ diverge, así que $\alpha_i \neq 0$, de

tal manera que si el vector de entrada es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

tendremos la máxima información del sistema porque sabemos como es que esta distribuida la composición del vector de entrada y de este modo la entropía será cero, esto es

$$S_o = -1Ln(1) = 0. \quad (3.67)$$

Sin embargo, si tenemos un vector de salida con coeficientes $\alpha_i \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

tendremos menos información del sistema ya que su entropía es mayor a cero

$$S_f = -(\alpha_1Ln(\alpha_1) + \alpha_2Ln(\alpha_2) + \alpha_3Ln(\alpha_3) + \alpha_4Ln(\alpha_4)) \neq 0, \quad (3.69)$$

y este valor, indica que no se puede distinguir la información entre los elementos que contiene el vector de salida después de salir de la matriz de transición.

Con todo lo descrito previamente, se tiene que a partir de las matrices de transición tipo Eherenfest, se puede hacer evolucionar en el tiempo un sistema de manera controlada, que a su vez, puede ser medido ese intercambio de infomación resultante al tiempo N , con la entropía de Von Neumann. Una forma de aplicar todos estos conceptos es como se describe en la siguiente sección.

3.4 Modos ópticos markovianos

Haciendo una recopilación de conceptos, en la sección 3.1, se definió un modo como la combinación lineal de funciones tipo Bessel, moduladas por amplitudes complejas α_n . También se mencionó que las amplitudes de estos modos pueden presentar un comportamiento probabilístico en el tiempo, por lo que se propone implementar un modelo basado en procesos

estocásticos que permitan controlar los coeficientes de amplitud. Así, en la sección 3.2 se describieron los procesos de Markov que implican una relación de orden por medio de las cadenas de Markov, de tal manera que de todo el conjunto de esos procesos, se propone trabajar con los de tipo Eherenfest, ya que éstos al evolucionar en el tiempo presentan una convergencia análoga a la de dos cuerpos aislados que están en intercambio de calor. Esto se puede relacionar con la óptica, si se aplica a un campo óptico coherente y se estudia su evolución, por medio del modelo de urnas, para llevarlo a un modo incoherente. Por otro lado con la entropía de Von Neumann se puede saber la coherencia que existe en el haz, puesto que a menor entropía es mayor la coherencia, ya que se tiene el factor de peso del haz principal que la compone.

De esta forma, diremos que un modo óptico Markoviano es

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2\pi r d) e^{in\theta} \alpha_n, \quad (3.70)$$

si los coeficientes de amplitud compleja α_n , son resultado del vector de salida de las cadenas de Markov.

En la siguiente sección se atenderá el caso de un modo óptico Markoviano del tipo Eherenfest, puesto que es de interés conocer la evolución de un campo óptico variante en el tiempo bajo esta cadena.

3.4.1 Modos ópticos markovianos del tipo Eherenfest

Como se mencionó en la sección 3.2, el modelo de Eherenfest es un caso particular de las cadenas de Markov, y éste consiste de dos urnas con r pelotitas que se están intercambiando entre ellas bajo cierta probabilidad p y con la condición de que exista al menos una pelotita en cada urna en todo momento, de tal manera que la convergencia de la evolución de este proceso es descrito a través de una matriz de transición tipo Eherenfest.

Aterrizando lo anterior, se busca generar un haz que este compuesto de cuatro haces, que conforme evolucione en el tiempo la contribución de cada uno de ellos se vea controlada por los factores de peso, dados por la probabilidad resultante de las cadenas de Markov tipo Eherenfest. Entonces, para generar el vector de salida en este proceso, sean dos urnas que se etiquetan como urna A y urna B , también sean 4 pelotitas distribuidas entre las urnas, la siguiente imagen esquematiza la idea descrita anteriormente.

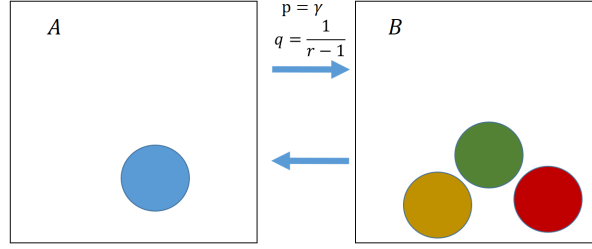


Figura 3.4: Modelo de Ehrenfest con $p = \gamma$ probabilidad de que pase la pelotita a la otra urna y $q = \frac{1}{r-1}$ probabilidad de que una pelotita sea seleccionada de la urna, en este caso $r = 4$.

Para el caso de la Figura 3.4, el vector que describe la distribución inicial de probabilidades en la urna A , es

$$\vec{\alpha}_0 = (1, 0, 0, 0), \quad (3.71)$$

asociándolo al sentido óptico, este vector describe que al tiempo $t = 0$, se tiene la contribución de un solo haz, por mencionar un orden, diremos que este factor de probabilidad corresponde a un J_0 , mientras que para J_1 , J_2 y J_3 el factor de contribución para el haz es cero.

Por otro lado, en la urna B se hallan las $r - 1$ pelotias, es decir que habrá 3 pelotitas. Como se mencionó en la ecuación (3.50), la matriz de transición de la cadena de Eherenfest, tiene la siguiente estructura

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ pq & (1-p)q + (1-q)(1-p) & p(1-q) & 0 \\ 0 & (1-p)(1-q) & pq + p(1-q) & (1-p)q \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

Donde la probabilidad de los elementos de ella son, $p = \gamma = \frac{1}{2}$ que es la probabilidad de que una pelotita se pase a la otra urna, $1 - p = \frac{1}{2}$ es la probabilidad complemento, es decir, que no pase a la otra urna y $q = \frac{1}{3}$ la probabilidad de cada una de las pelotitas en la urna B , de tal manera la matriz de transición del arreglo mostrado en la Figura 3.4, es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

Con lo anterior, se puede plantear la evolución del sistema para el n -ésimo tiempo tal como se mencionó en la ecuación (3.55), ya que se conoce el vector con la distribución inicial de probabilidades de que aparezcan los haces y la matriz de transición de tipo Eherenfest para 4 pelotitas, así de la ecuación general

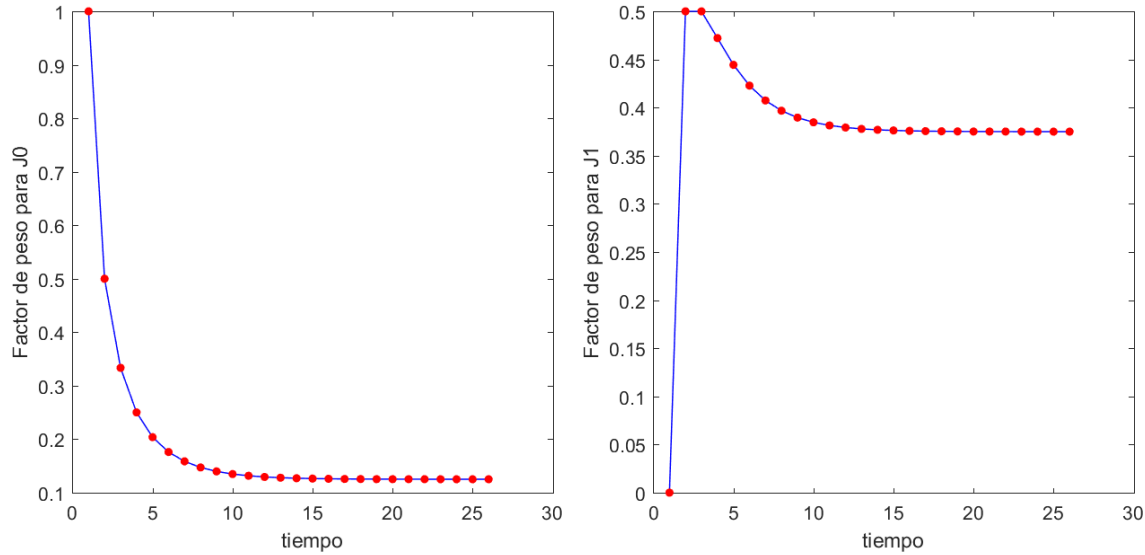
$$\vec{\alpha}_0 \mathbf{P}^n = \vec{\alpha}_n, \quad (3.74)$$

se tiene que para el n -ésimo tiempo, el vector de probabilidades de salida esta dado por

$$(1, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha_n(1) \\ \alpha_n(2) \\ \alpha_n(3) \\ \alpha_n(4) \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

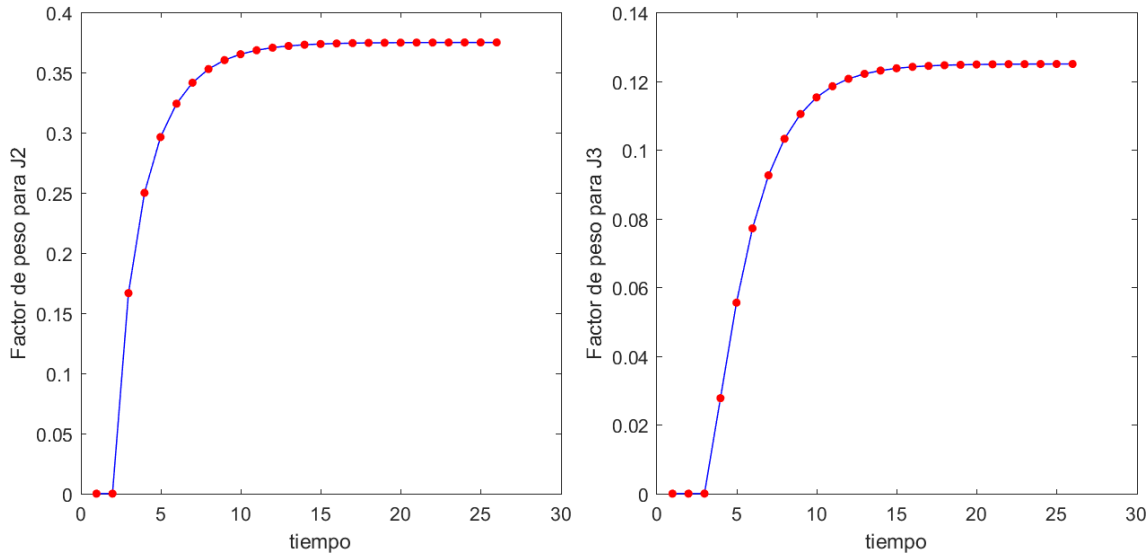
Notar que la matriz de transición \mathbf{P} , es una matriz estocástica puesto que la suma de las probabilidades en cada renglón da 1. Por otro lado, cada uno de los elementos del vector de salida son las probabilidades asociadas a la contribución de J_0 , J_1 , J_2 y J_3 al haz final.

Un aspecto interesante, es el que se muestra a continuación, puesto que se pretende mostrar gráficamente que la evolución del sistema a través del modelo de Eherenfest tiende a convergir a un cierto valor después de n iteraciones o tiempos, presentando un comportamiento análogo al equilibrio térmico, dado por el intercambio de calor entre dos cuerpos.



(a) Evolución del factor de peso para J_0 , en $n = 0$, (b) Evolución del factor de peso para J_1 , en $n = 0$, $\alpha_0(1) = 1$, después para $n = 25$, $\alpha_{25}(1) = 0.1250$ $\alpha_0(0) = 0$, después para $n = 25$, $\alpha_{25}(2) = 0.3750$

Figura 3.5: Evolución del vector de entrada en las componentes $\alpha_n(1)$ y $\alpha_n(2)$



(a) Evolución del factor de peso para J_2 , en $n = 0$, (b) Evolución del factor de peso para J_3 , en $n = 0$, $\alpha_0(3) = 0$, después para $n = 25$, $\alpha_{25}(3) = 0.3750$ $\alpha_0(4) = 0$, después para $n = 25$, $\alpha_{25}(4) = 0.1250$

Figura 3.6: Evolución del vector de entrada en las componentes $\alpha_n(3)$ y $\alpha_n(4)$

Dado un vector de probabilidad inicial, con $\vec{\alpha}_0 = (1, 0, 0, 0)$ y con $n = 25$ tiempos

actuando sobre la matriz de transición, las Figuras 3.6a y 3.6b, muestran la convergencia de cada una de las entradas a un valor de probabilidad, que será el factor de peso de su contribución para el haz de salida. Así, entre mayor sea el número de iteraciones a través de la matriz de transición, el vector de salida convergerá más lento a su valor de equilibrio.

Por otro lado, para medir el intercambio de información que existió, entre el vector de entrada y el vector de salida para un cierto tiempo n , es conveniente usar la entropía de Von Neumann, ecuación (3.57),

$$S = - \sum_{i=1}^N \alpha_n(i) \ln(\alpha_n(i)). \quad (3.76)$$

En la Tabla 3.1 se muestra la evolución de los valores de entropía para cada tiempo n ,

Tabla 3.1: Valores de entropía del vector de probabilidad resultante durante la evolución del tiempo

Vector α_n	número de iteraciones n	Entropía de Von Neumann
$\vec{\alpha}_0 = (1, 0, 0, 0)$	0	0
$\vec{\alpha}_1 = (0.5, 0.5, 0, 0)$	1	0.6931
$\vec{\alpha}_2 = (0.3333, 0.5, 0.1666, 0)$	2	1.0113
$\vec{\alpha}_3 = (0.2500, 0.4722, 0.2500, 0.0278)$	3	1.1470
$\vec{\alpha}_4 = (0.2037, 0.4444, 0.2963, 0.0556)$	4	1.2055
$\vec{\alpha}_5 = (0.1759, 0.4228, 0.3241, 0.0772)$	5	1.2325
$\vec{\alpha}_6 = (0.1584, 0.4074, 0.3416, 0.0926)$	6	1.2450
$\vec{\alpha}_7 = (0.1471, 0.3968, 0.3529, 0.1032)$	7	1.2507
$\vec{\alpha}_8 = (0.1397, 0.3896, 0.3603, 0.1104)$	8	1.2533
$\vec{\alpha}_9 = (0.1348, 0.3847, 0.3652, 0.1153)$	9	1.2545
$\vec{\alpha}_{10} = (0.1250, 0.3750, 0.3750, 0.1250)$	10	1.2550
$\vec{\alpha}_{15} = (0.1250, 0.3750, 0.3750, 0.1250)$	15	1.2555
$\vec{\alpha}_{20} = (0.1250, 0.3750, 0.3750, 0.1250)$	20	1.2555
$\vec{\alpha}_{25} = (0.1250, 0.3750, 0.3750, 0.1250)$	25	1.2555

Los datos de la Tabla 3.1, muestran que conforme aumentan las iteraciones, aumenta el valor de entropía, a tal punto que su valor llega a un valor estable, es decir, ya no muestra que exista un desorden entre sus elementos.

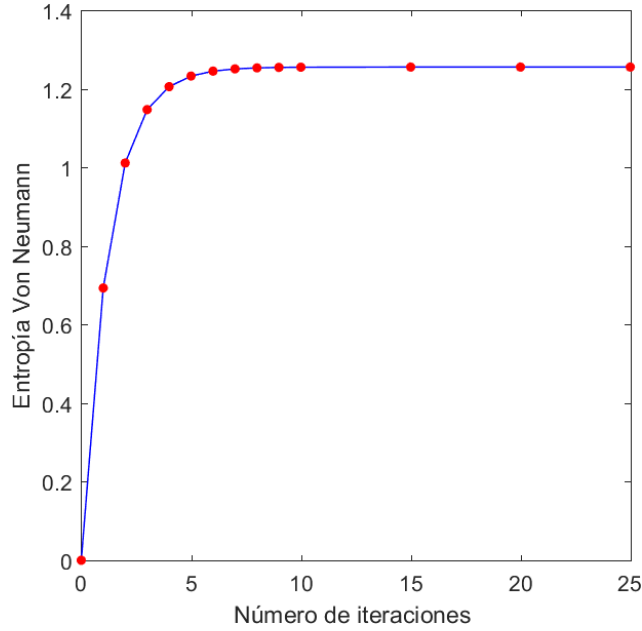


Figura 3.7: El tener un vector de probabilidades bien definido con un solo elemento actuando, hace que la información arrojada por la entropía sea mínima, sin embargo, cuando esta información se distribuye entre cada una de las componentes del vector de salida, indica que la entropía alcanza un máximo, es decir, ha habido un intercambio de información entre los elementos que la componen.

Después de haber analizado el comportamiento del intercambio de información sobre los vectores de probabilidad de salida resultantes de la matriz de transición, asociamos estos valores de probabilidad a los modos markovianos, que como se mencionó, sus amplitudes son moduladas por una dependencia temporal y a su vez éstos serán los factores de peso para la contribución de los modos Bessel que componen al modo óptico. Para ello, es conveniente recordar la estructura del modo markoviano acotado para $N = 3$

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} \sum_{n=0}^3 \alpha_n J_n(2\pi r d) e^{in\theta}. \quad (3.77)$$

Sustituyendo el vector de probabilidad de salida α_n en la expresión del modo óptico markoviano, tenemos

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} \sum_{n=0}^3 \vec{\alpha}_0^n \mathbf{P}^n J_n(2\pi r d) e^{in\theta}. \quad (3.78)$$

Donde su irradiancia, es

$$I(r, \theta, z) = |U(r, \theta, z)|^2 = U(r, \theta, z)U^*(r, \theta, z)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(e^{i\beta z} \sum_{n=0}^3 \alpha_n J_n(2\pi r d) e^{in\theta} \right) \left(e^{i\beta z} \sum_{m=0}^3 \alpha_m J_m(2\pi r d) e^{im\theta} \right)^* \\
&= \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^3 \alpha_n \alpha_m^* J_n(2\pi r d) J_m^*(2\pi r d) e^{in\theta} e^{-im\theta}, \tag{3.79}
\end{aligned}$$

que se puede ver como la correlación de dos puntos a distintos tiempos. A su vez, diremos que este es un modo parcialmente coherente en el tiempo, puesto que para diferentes tiempos el valor de la amplitud varía de acuerdo a $\vec{\alpha}_0 \mathbf{P}$. Además, como la amplitud es una variable aleatoria estadísticamente independiente, se toma el valor promedio de las intensidades, así, se tiene

$$\langle I(r, \theta) \rangle = \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^3 \langle \alpha_n \alpha_m^* \rangle J_n(2\pi r d) J_m^*(2\pi r d) e^{in\theta} e^{-im\theta}. \tag{3.80}$$

Notar que la ecuación (3.80), se puede representar en forma matricial, tal como se hizo en la ecuación (2.38).

Resumiendo todo lo antes mencionado, se pueden generar modos ópticos parcialmente coherentes asociando a las amplitudes una dependencia temporal que puede ser controlada por procesos estocásticos, en particular, con las cadenas de Markov del tipo Eherenfest. También se analiza el intercambio de información que existe durante todo este proceso midiendo con la entropía de Von Neumann.

El medir la entropía del sistema después de n tiempos nos permite saber que tan coherente es el modo. Un ejemplo que lo ilustra, es por medio de la Tabla 3.1, donde al tener un sistema totalmente coherente cuando $n = 0$ y con $\vec{\alpha}_0 = (1, 0, 0, 0)$ su entropía es cero, en cambio cuando n va aumentando, la entropía también lo hace, puesto que todos los elementos del vector de salida contribuyen al modo final, lo que lo hace un modo menos coherente. De esta forma, se puede decir que un modo coherente tiene menor entropía y un modo incoherente mayor entropía. Con lo anterior, se puede inferir que se puede pasar de modos coherentes a incoherentes por medio de la matriz de transición.

El comportamiento de la irradiancia de estos modos es presentado por una serie de simulaciones en la siguiente sección.

3.4.2 Simulación numérica de los modos Markovianos tipo Eherenfest

Para conocer el comportamiento de los modos Markovianos

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} \sum_{n=0}^3 \alpha_n J_n(2\pi r d) e^{in\theta}$$

se presentan los resultados de la simulación numérica de su irradiancia

$$\langle I(r, \theta) \rangle = \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^3 \langle \alpha_n \alpha_m^* \rangle J_n(2\pi r d) J_m^*(2\pi r d) e^{in\theta} e^{-im\theta}.$$

Usando un código en Matlab, se definieron los siguientes parámetros: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, fase $\theta = \tan^{-1}(\frac{x}{y})$, longitud de onda $\lambda = .633$ [micras], módulo del vector de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, y d número de anillos de los modos Bessel, además de introducir el vector de probabilidades de salida $\alpha_n(N)$, dada la matriz de transición tipo Eherenfest.

El modo markoviano para el tiempo $n = 0$ con $\vec{\alpha}_0 = (1, 0, 0, 0)$ es

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} J_0(2\pi r d)$$

y su irradiancia es

$$I(r, \theta) = \left| J_0(2\pi r d) e^{i\theta} \right|^2$$

que corresponde a la intensidad mostrada en la Figura 3.8

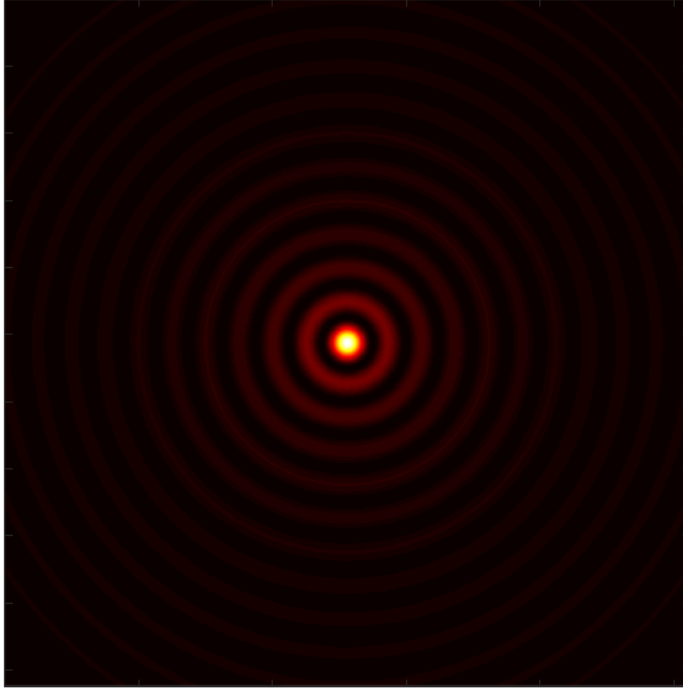


Figura 3.8: Irradiancia del modo markoviano cuando $n = 0$ y su vector de probabilidades es $\alpha_0 = (1, 0, 0, 0)$

Modo markoviano para el tiempo $n = 1$ con $\vec{\alpha}_1 = (1/2, 1/2, 0, 0)$ es

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} \left(\frac{1}{2} J_0(2\pi r d) + \frac{1}{2} J_1(2\pi r d) e^{i\theta} \right)$$

y su irradiancia es

$$I(r, \theta) = \left| \frac{1}{2} J_0(2\pi r d) e^{i\theta} + \frac{1}{2} J_1(2\pi r d) e^{i\theta} \right|^2$$

la cual se muestra en la Figura 3.9

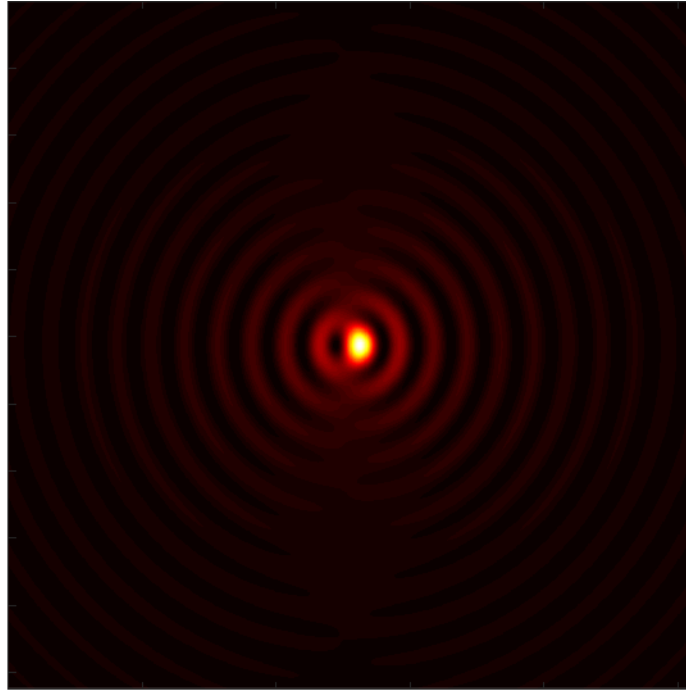


Figura 3.9: Irradiancia de modo markoviano cuando $n = 1$ y su vector de probabilidades es $\alpha_1 = (1/2, 1/2, 0, 0)$

El modo markoviano para el tiempo, $n = 2$, $\vec{\alpha}_2 = (\frac{4}{12}, \frac{6}{12}, \frac{2}{12}, 0)$ es

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} \left(\frac{4}{12} J_0(2\pi r d) + \frac{6}{12} J_1(2\pi r d) e^{i\theta} + \frac{2}{12} J_2(2\pi r d) e^{i2\theta} \right)$$

y su irradiancia es

$$I(r, \theta) = \left| \frac{4}{12} J_0(2\pi r d) + \frac{6}{12} J_1(2\pi r d) e^{i\theta} + \frac{2}{12} J_2(2\pi r d) e^{i2\theta} \right|^2$$

la cual se muestra en la Figura 3.10

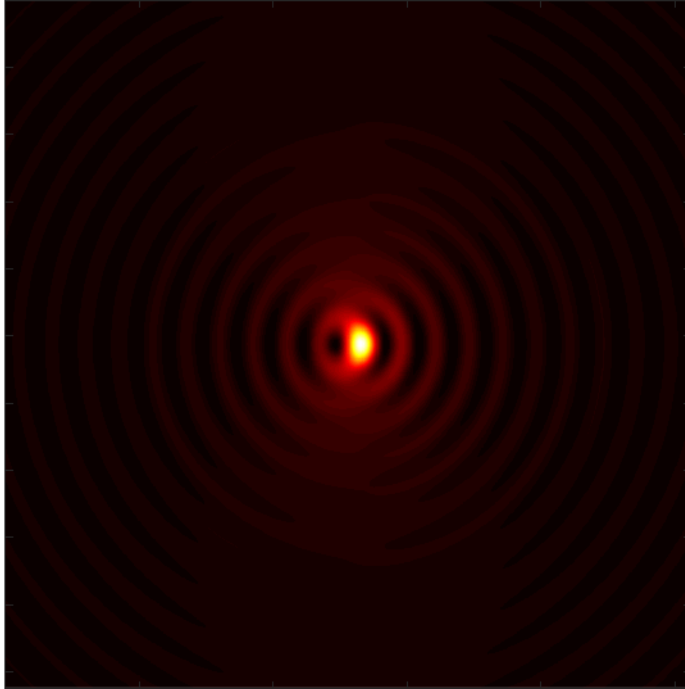


Figura 3.10: Irradiancia del modo markoviano cuando $n = 2$ y su vector de probabilidades es $\alpha_2 = (\frac{4}{12}, \frac{6}{12}, \frac{2}{12}, 0)$

El modo markoviano para el tiempo $n = 3$ con $\vec{\alpha}_3 = (0.25, 0.4722, 0.25, 0.0278)$ es

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} (0.25J_0(2\pi rd) + 0.4722J_1(2\pi rd)e^{i\theta} + 0.25J_2(2\pi rd)e^{i2\theta} + 0.0278J_3(2\pi rd)e^{i3\theta})$$

y su irradiancia es

$$I(r, \theta) = \left| 0.25J_0(2\pi rd) + 0.4722J_1(2\pi rd)e^{i\theta} + 0.25J_2(2\pi rd)e^{i2\theta} + 0.0278J_3(2\pi rd)e^{i3\theta} \right|^2$$

la cual se muestra en la Figura 3.11

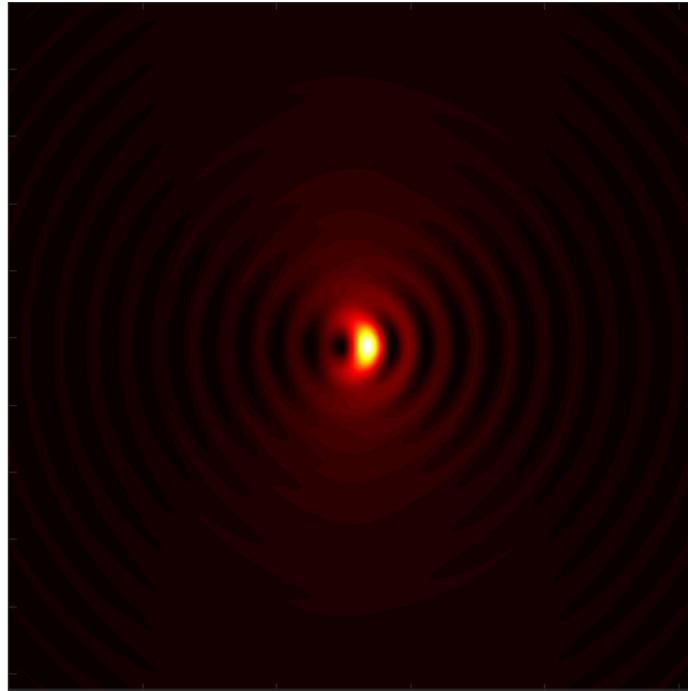


Figura 3.11: Irradiancia del modo markoviano cuando $n = 3$ y su vector de probabilidades es $\alpha_3 = (0.25, 0.4722, 0.25, 0.0278)$

Recordando los valores de la Tabla 3.1, a partir de $n = 15$, los valores de entropía se mantienen constantes, esto debido a que las componentes del vector de probabilidad de salida han llegado a su equilibrio y se mantienen constantes sin importar que n siga aumentando. Por lo tanto, se presenta el modo resultante después de 15 tiempos.

El modo markoviano para el tiempo $n = 25$, con $\vec{\alpha}_{25} = (0.125, 0.375, 0.375, 0.125)$ es

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} (0.125J_0(2\pi rd) + 0.375J_1(2\pi rd)e^{i\theta} + 0.375J_2(2\pi rd)e^{i2\theta} + 0.125J_3(2\pi rd)e^{i3\theta})$$

y su irradiancia es

$$I(r, \theta) = \left| 0.125J_0(2\pi rd) + 0.375J_1(2\pi rd)e^{i\theta} + 0.375J_2(2\pi rd)e^{i2\theta} + 0.125J_3(2\pi rd)e^{i3\theta} \right|^2$$

la cual se muestra en la Figura 3.12

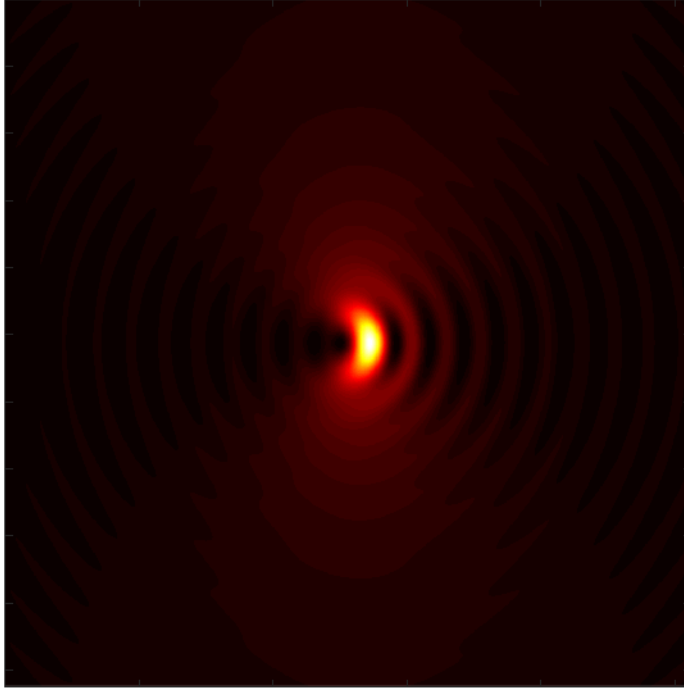


Figura 3.12: Irradiancia del modo markoviano cuando $n = 25$ y su vector de probabilidades es $\alpha_{25} = (0.125, 0.375, 0.375, 0.125)$

Las simulaciones que se presentan, muestran de manera visual por medio de su irradiancia, la evolución del modo para diferentes tiempos. Como previamente se calculó, cada uno de ellos tiene distintos valores de entropía por lo que permite saber que tan incoherente se vuelve el modo cada vez que evoluciona en el tiempo. Las propiedades de estos modos pueden ser aplicadas a diferentes sistemas ópticos, en particular en el área de la holografía con el grabado de hologramas de amplitud, dando una propuesta distinta a los hologramas convencionales.

Capítulo 4

Aplicación de modos ópticos markovianos en la holografía

La holografía es una técnica de fotografía que consiste en crear imágenes tridimensionales basada en el empleo de la luz. Inicialmente consistía en registrar sobre una placa la onda de un campo, es decir la amplitud y la fase de la luz dispersada por un objeto. Para lo anterior, se grababa sobre una placa fotorefractiva el patrón de interferencia debido a dos ondas. La intensidad en un punto sobre el patrón depende de la fase como la amplitud de la onda original del objeto. Así, la placa fotorefractiva procesada es llamada holograma y contiene información codificada de la amplitud y la fase de la onda del objeto. Por otro lado, la imagen del objeto podía ser recuperada iluminando el holograma con la misma onda de referencia [10].

Sin embargo, los hologramas también pueden ser producidos por una computadora que permite la generación de frentes de onda con una amplitud y distribución de fase predescritos. Lo anterior, permite la distinción de dos tipos de hologramas que son *hologramas de amplitud* y *hologramas sintéticos de fase*; el primero es generado por una onda objeto de la forma $S(x, y) = a_S(x, y)e^{i\Phi_S(x, y)}e^{i2\pi(u_0x, v_0y)}$ y una onda de referencia $R(x, y) = a_R(x, y)e^{i\Phi_R(x, y)}e^{-i2\pi(u_0x, v_0y)}$, tal que $h(x, y) = |S(x, y) + R(x, y)|^2$; mientras que en el segundo tipo de hologramas el campo incidente es $S(x, y) = a(x, y)e^{i\Phi(x, y)}$ y la función de fase que representa al holograma es $h(x, y) = e^{i\psi(a(x, y), \Phi(x, y))}$, donde esta fase es función de la amplitud y fase del campo incidente $S(x, y)$. Para fines de este trabajo, se realizará una breve descripción matemática de los hologramas de amplitud.

El siguiente diagrama ilustra con el trazo de rayos el grabado de un holograma sobre una placa y la reconstrucción del mismo

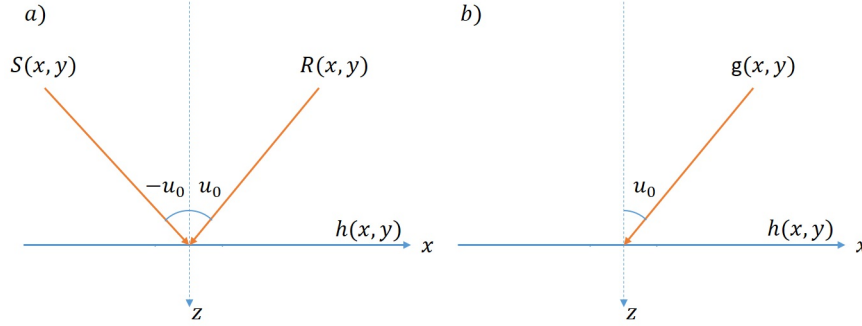


Figura 4.1: a) Proceso de grabado sobre una placa fotorefractiva: $S(x, y)$ es la onda objeto y $R(x, y)$ es la onda de referencia, generando patrón de interferencia $h(x, y)$; b) Proceso de reconstrucción del holograma: $g(x, y)$ es la onda de referencia con que se ilumina el holograma $h(x, y)$ a una inclinación u_0 respecto al eje de propagación.

4.1 Representación matemática de generación y reconstrucción de un holograma

Se propone una onda objeto de la forma

$$S(x, y) = a_S(x, y)e^{i\Phi_S(x, y)}e^{i2\pi(u_0x, v_0y)} \quad (4.1)$$

con una amplitud $a = [0, 1]$ y fase $\Phi = [-\pi, \pi]$, por otro lado, la onda de referencia de la forma

$$R(x, y) = a_R(x, y)e^{i\Phi_R(x, y)}e^{-i2\pi(u_0x, v_0y)} \quad (4.2)$$

De tal manera que la superposición de la onda objeto con la onda de referencia genera un patrón de interferencia

$$\begin{aligned} h(x, y) &= |S(x, y) + R(x, y)|^2 \\ &= |a_S(x, y)e^{i\Phi_S(x, y)}e^{i2\pi(u_0x, v_0y)} + a_R(x, y)e^{i\Phi_R(x, y)}e^{-i2\pi(u_0x, v_0y)}|^2 \\ &= a_S^2(x, y) + a_R^2(x, y) + a_S(x, y)a_R(x, y)e^{i[\Phi_S(x, y) - \Phi_R(x, y) + 4\pi(u_0x, v_0y)]} \\ &\quad + a_S(x, y)a_R(x, y)e^{-i[\Phi_S(x, y) - \Phi_R(x, y) + 4\pi(u_0x, v_0y)]} \end{aligned}$$

tal que se puede reducir a

$$h(x, y) = a_S^2(x, y) + a_R^2(x, y) + 2a_S(x, y)a_R(x, y) \cos[\Phi_S(x, y) - \Phi_R(x, y) + 4\pi(u_0x, v_0y)]. \quad (4.3)$$

donde la función de interferencia $h(x, y)$, es la función del holograma y ésta contiene la información codificada tanto de la amplitud y la fase.

En el proceso de reconstrucción del holograma, la función del holograma $h(x, y)$, es iluminada con otra onda de la forma $g(x, y) = a_g(x, y)e^{i\Phi_g(x, y)}e^{i2\pi(u_0x, v_0y)}$, tal que se tiene

$$t(x, y) = h(x, y)g(x, y) \quad (4.4)$$

donde $t(x, y)$ es una función portadora. Por otro lado, para separar los términos de la función portadora, se aplica la transformada de Fourier a $t(x, y)$, esto es

$$T(u, v) = \mathcal{F}\{t(x, y)\} = \mathcal{F}\{h(x, y)g(x, y)\} \quad (4.5)$$

así, por el teorema del espectro angular, ecuación (3.31)

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} T(u, v) e^{-i\pi\lambda z(u^2+v^2)} e^{i2\pi(xu+yv)} dudv,$$

la función $T(u, v)$ se propagará a lo largo del eje z como $T(u, v)e^{-i\pi\lambda z(u^2+v^2)}$ de tal manera que el campo de salida es

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{h(x, y)g(x, y)\} e^{-i\pi\lambda z(u^2+v^2)} e^{i2\pi(xu+yv)} dudv. \quad (4.6)$$

4.2 Generación de hologramas con modos ópticos markovianos

En el capítulo anterior, se describieron los modos ópticos Markovianos del tipo Eherenfest, de la forma

$$U(r, \theta, z) = e^{i\beta z} \sum_{n=0}^N \alpha_n J_n(2\pi r d) e^{in\theta}$$

donde la característica de ellos, es que los coeficientes de amplitud compleja α_n son controlados por una matriz de transición dada por las cadenas de Markov.

Para generar los hologramas con los modos ópticos markovianos del tipo Eherenfest, sea una onda objeto

$$S(x, y) = e^{i\beta z} \sum_{n=0}^3 \alpha_n J_n(2\pi r d) e^{in\theta} e^{i2\pi u_0 x} \quad (4.7)$$

y una onda de referencia

$$R(x, y) = e^{i\beta z} \sum_{n=0}^3 \alpha_n J_n(2\pi r d) e^{in\theta} e^{-i2\pi u_0 x} \quad (4.8)$$

tal que la función del holograma es

$$h(x, y) = \left| e^{i\beta z} \sum_{n=0}^3 \alpha_n J_n(2\pi r d) e^{in\theta} e^{i2\pi u_0 x} + e^{i\beta z} \sum_{n=0}^3 \alpha_n J_n(2\pi r d) e^{in\theta} e^{-i2\pi u_0 x} \right|^2 \quad (4.9)$$

$$h(x, y) = \left(e^{i\beta z} \sum_{n=0}^3 \alpha_n J_n(2\pi r d) e^{in\theta} e^{i2\pi u_0 x} + e^{i\beta z} \sum_{n=0}^3 \alpha_n J_n(2\pi r d) e^{in\theta} e^{-i2\pi u_0 x} \right) \times \left(e^{i\beta z} \sum_{m=0}^3 \alpha_m J_m(2\pi r d) e^{im\theta} e^{i2\pi u_0 x} + e^{i\beta z} \sum_{m=0}^3 \alpha_m J_m(2\pi r d) e^{im\theta} e^{-i2\pi u_0 x} \right)^* \quad (4.10)$$

donde (*) implica la función conjugada del holograma.

Posteriormente, para su reconstrucción, esta función es iluminada por otra onda de referencia

$$g(x, y) = \sum_{p=0}^3 \alpha_p J_p(2\pi r d) e^{ip\theta} \quad (4.11)$$

donde esta es perpendicular a la placa holográfica, es decir $u_0 = 0$, así

$$t(x, y) = \left(\sum_{n,m=0}^3 \alpha_n \alpha_m J_n(2\pi r d) J_m(2\pi r d) e^{i(n-m)\theta} + \sum_{n,m=0}^3 \alpha_n \alpha_m J_n(2\pi r d) J_m(2\pi r d) e^{i(n-m)\theta} + \sum_{n,m=0}^3 \alpha_n \alpha_m J_n(2\pi r d) J_m(2\pi r d) e^{i(n-m)\theta} e^{i2(2\pi u_0 x)} + \sum_{n,m=0}^3 \alpha_n \alpha_m J_n(2\pi r d) J_m(2\pi r d) e^{i(n-m)\theta} e^{-i2(2\pi u_0 x)} \right) \times \sum_{q=0}^3 \alpha_q J_q(2\pi r d) e^{iq\theta}. \quad (4.12)$$

Así, la ecuación (4.12) es la función portadora, misma a la que se le aplicará la transformada de Fourier y que posteriormente se propagará por medio del espectro angular, de tal forma que a la salida de ella, se tendrá el campo del holograma reconstruido a una distancia z .

4.2.1 Simulación numérica de hologramas con modos ópticos markovianos

Por medio de un código hecho en Matlab, se presenta la simulación numérica de los patrones de interferencia y difracción producidos por el espectro angular. Para generar los modos ópticos markovianos, los parámetros usados son: un tiempo de iteración $n = 25$, el ángulo de inclinación tanto de la onda objeto $S(x, y)$ y onda de referencia $R(x, y)$ es $u_0 = \pi/8$, vector de distribución de amplitudes $\vec{\alpha}_{25} = (0.125, 0.375, 0.375, 0.125)$, r y d constantes, y la distancia de propagación por el espectro angular es $z = 10000000\lambda$, donde $\lambda = .633$ [micras]. Para la onda de iluminación son los mismos parámetros, con la diferencia de que el ángulo de incidencia respecto a la placa es normal, eso hace que $u_0 = 0$.

Con lo anterior, el patrón de interferencia sobre la placa $h(x, y) = |S(x, y) + R(x, y)|^2$, mostrado en la Figura 4.2

Para la reconstrucción del holograma, la función $h(x, y)$ es iluminada con una onda de referencia, esto es $t(x, y) = h(x, y)g(x, y)$, donde $g(x, y)$ es un modo markoviano. Después de que la función portadora es propagada a una distancia $z = 10000000\lambda$ por el espectro angular, la irradiancia del campo de salida se muestra en la Figura 4.3.

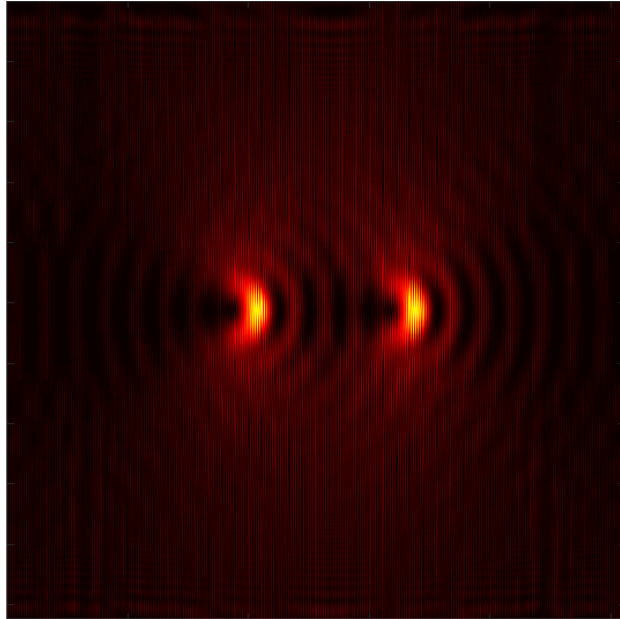


Figura 4.2: Interferencia de dos modos markovianos, siendo una onda objeto $S(x, y)$ y una onda referencia $R(x, y)$ respectivamente, con inclinación $u_0 = \pi/8$ respecto al eje de propagación z .

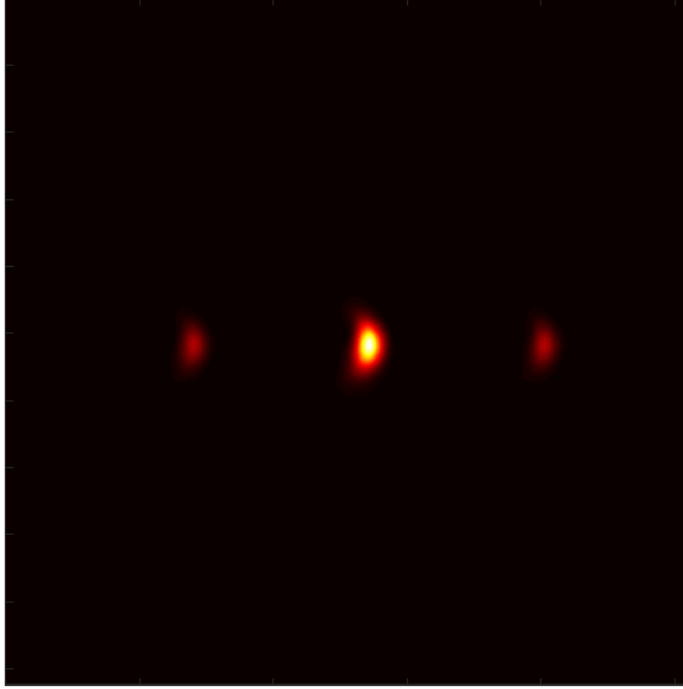


Figura 4.3: Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ con iluminación perpendicular de un modo markoviano de referencia $g(x, y)$.

Es importante resaltar que en la función portadora $t(x, y)$ ecuación (4.13), las sumatorias presentan la contribución de todos los términos cruzados de los subíndices n, m y q , es decir, que los términos $\langle a_n a_m \rangle$ describen la interacción entre los elementos de la base, así $a_n a_m$ representan la fracción de energía que se transfiere del modo markoviano n al otro modo markoviano m y de manera similar para el modo markoviano q , por lo tanto el campo resultante en la recuperación del holograma tiene el comportamiento presentado en la Figura 4.3.

Sin embargo, dado que se ha estado estudiando el comportamiento de las amplitudes de los modos markovianos como valores dependientes del tiempo, al tomar el valor promedio los valores cruzados son cero, esto es $\langle a_m^* a_n \rangle = 0$, cuando $n \neq m$, tal como se mencionó en la ecuación (2.38), por lo que en la matriz de correlaciones resultado de la interferencia de los dos modos tendrá solo la contribución de los elementos de la diagonal. Así, se pretende ver el acoplamiento entre los modos para cada J_n .

Con lo anterior, dada la ecuación (4.13), se consideran solo los terminos cuando

$n = m$ y la expresión de la portadora es

$$t(x, y) = \left(2 \sum_{n=0}^3 \alpha_n^2 J_n^2(2\pi r d) + \sum_{n=0}^3 \alpha_n^2 J_n^2(2\pi r d) e^{i2(2\pi u_0 x)} + \sum_{n=0}^3 \alpha_n^2 J_n^2(2\pi r d) e^{-i2(2\pi u_0 x)} \right) \times \sum_{q=0}^3 \alpha_q J_q(2\pi r d) e^{iq\theta}. \quad (4.13)$$

De esta manera, tenemos la expresión de interferencia $h(x, y)$ para los términos cuadrados, que es iluminada con un modo markoviano $g_{25}(x, y) = e^{i\beta z} (0.125J_0(2\pi r d) + 0.375J_1(2\pi r d)e^{i\theta} + 0.375J_2(2\pi r d)e^{i2\theta} + 0.125J_3(2\pi r d)e^{i3\theta})$, el cual se muestra en la Figura 4.4, donde el subíndice 25 corresponde a un modo markoviano que ha evolucionado hasta el tiempo $n = 25$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa

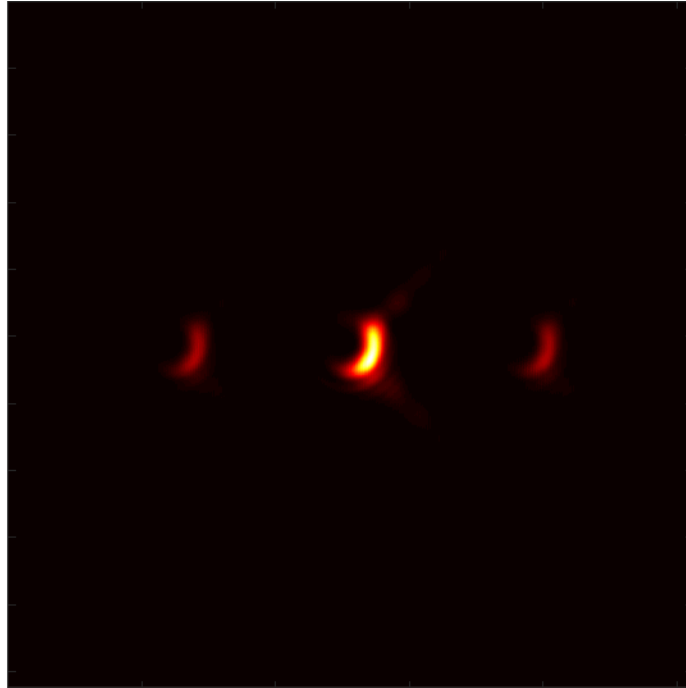


Figura 4.4: Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ sin términos cruzados, iluminado con un modo markoviano de referencia $g_{25}(x, y)$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa.

Para ver como se comporta el holograma iluminado con un modo markoviano en diferentes momentos de su evolución en el tiempo, se presentan a continuación unos resultados.

Al iluminar la placa holográfica $h(x, y)$ con un modo markoviano evolucionado al tiempo $n = 0$, es decir $g_0(x, y) = J_0(2\pi r d)$, el holograma reconstruido se muestra en la Figura 4.5

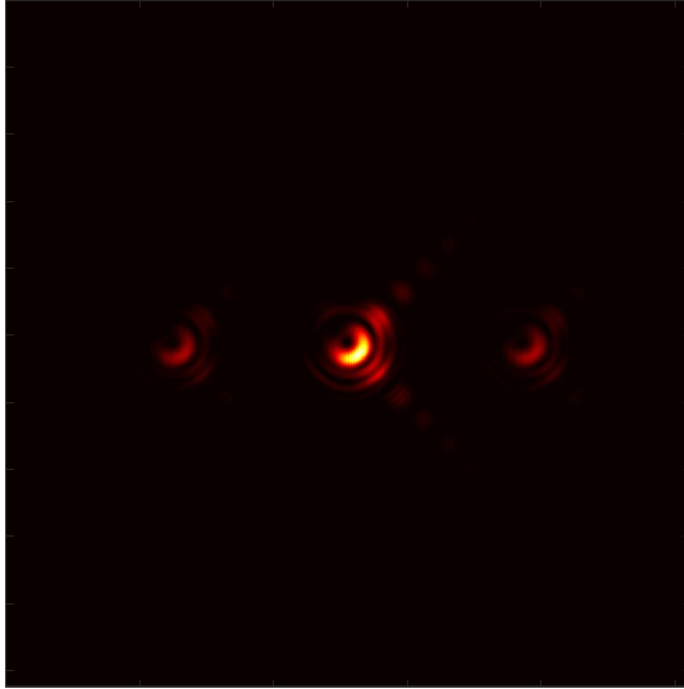


Figura 4.5: Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ sin términos cruzados, iluminado con un modo markoviano de referencia $g_0(x, y)$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa.

Al iluminar la placa holográfica $h(x, y)$ con un modo markoviano evolucionado al tiempo $n = 1$, es decir $g_1(x, y) = \frac{1}{2}J_0(2\pi rd) + \frac{1}{2}J_1(2\pi rd)e^{i\theta}$, el holograma reconstruido mostrado en la Figura 4.6

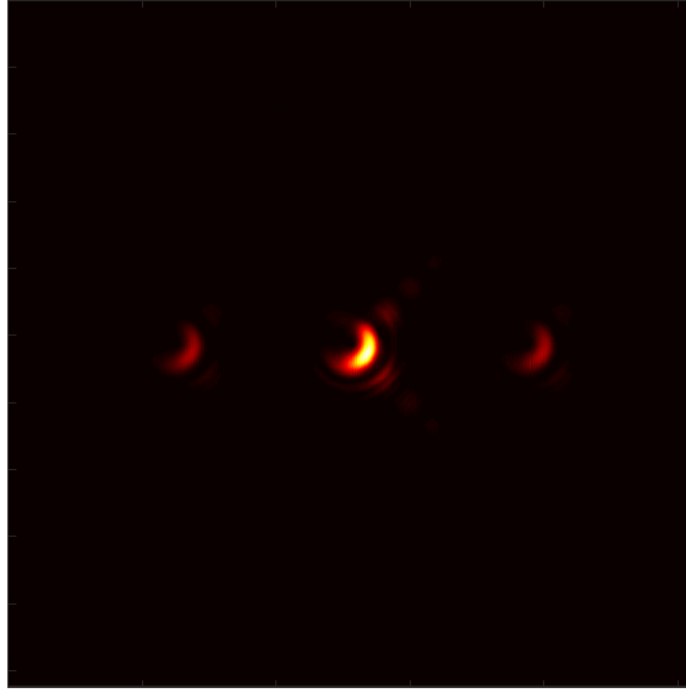


Figura 4.6: Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ sin términos cruzados, iluminado con un modo markoviano de referencia $g_1(x, y)$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa.

Al iluminar la placa holográfica $h(x, y)$ con un modo markoviano evolucionado al tiempo $n = 2$, es decir, $g_2(x, y) = \frac{4}{12}J_0(2\pi rd) + \frac{6}{12}J_1(2\pi rd)e^{i\theta} + \frac{2}{12}J_2(2\pi rd)e^{i2\theta}$, el holograma reconstruido mostrado en la Figura 4.7

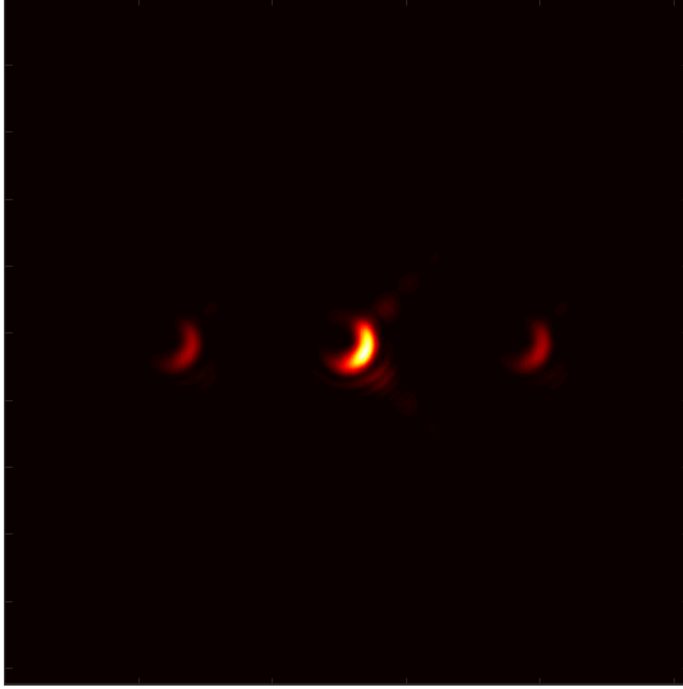


Figura 4.7: Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ sin términos cruzados, iluminado con un modo markoviano de referencia $g_2(x, y)$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa.

De esta manera, se muestra gráficamente que el acoplamiento de la onda de iluminación $g(x, y)$ sobre el holograma $h(x, y)$, dependerá de la entropía dada por las amplitudes de los modos markovianos. Es decir, cuando un modo markoviano tiene poca entropía en sus amplitudes, la restauración del holograma permite ver mayor definición de los anillos de la irradiancia del campo de salida, sin embargo, cuando las amplitudes muestran una mayor entropía la imagen del holograma cambia drásticamente además de perder información debido a la contribución uniforme de las amplitudes.

Finalmente, se presenta la función de irradiancia $h(x, y)$ con la contribución de las correlaciones cruzadas ecuación (4.10), iluminada por una onda plana $g(x, y) = e^{ikz}$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa del holograma y se muestra en la Figura 4.8

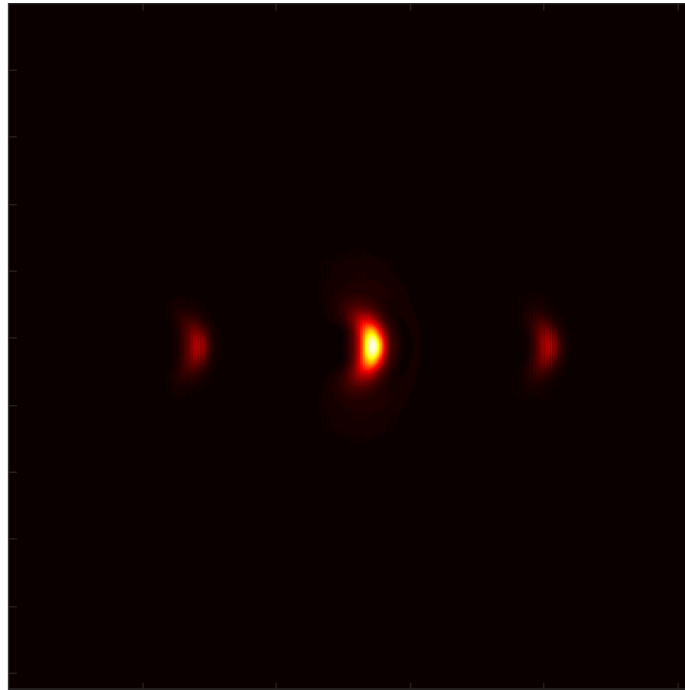


Figura 4.8: Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ con términos cruzados, iluminado con una onda plana de referencia $g(x, y) = e^{ikz}$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa.

De tal forma que en esta última imagen se puede apreciar el efecto conocido como *the dark hollow beam* o también conocido como *hueco oscuro*, donde existe una inversión de contraste en el centro del campo.

Capítulo 5

Conclusiones

Conocer y entender los eventos probabilísticos es de gran utilidad, ya que permite analizar procesos más complejos e interesantes como lo son los procesos estocásticos. Su interés radica en el hecho de que las variables aleatorias son funciones dependientes del tiempo y esto permite su aplicación para diferentes sistemas dinámicos.

En el presente trabajo, se describieron los procesos aleatorios como procesos que no pueden ser predichos de manera determinista, sino que se describen a través de un comportamiento promedio. A partir de ellos, se definen los procesos estocásticos, que son procesos aleatorios que evolucionan en el tiempo y a los procesos que tienen la propiedad de que su cambio en el tiempo t está determinado por el valor anterior a éste y no por todos los valores anteriores, se les conoce como *Procesos de Markov*, del que se desprenden las cadenas de Markov, que son cadenas de probabilidad condicional y que se lleva a cabo por una transición de probabilidades de la forma

$$p(X_0, X_1, \dots, X_n) = P(X_n|X_{n-1}, \dots, X_0) \dots P(X_2|X_1, X_0) P(X_1|X_0) p(X_0) \quad (5.1)$$

donde $p(X_0 = i)$ es el vector inicial de probabilidades.

Con estas bases teóricas, se aplicó el problema a un caso particular y para ello se describió el proceso de Markov del tipo Eherenfest, donde se describe por medio de una matriz de transición la evolución del intercambio de pelotitas para llevarlo a un estado de equilibrio. Conociendo el comportamiento de la evolución de un sistema dado un vector con las condiciones iniciales, se conecta a los campos ópticos. De esta manera, por el espectro angular se encuentra que un modo puede ser escrito como la suma discreta de ondas Bessel; para llevar a cabo campos ópticos donde sus amplitudes sean moduladas con el tiempo, se

retoma la condición del vector de probabilidades de entrada y el vector resultante al ser tratado n veces por la matriz de transición, de tal manera que conociendo las condiciones iniciales que componen el campo de entrada y dejándolo evolucionar hasta cierto tiempo se tendrán los factores de peso de la probabilidad de que aparezcan los modos Bessel. Lo cual ofrece la ventaja de manejar campos con diferentes vorticidades. Sin embargo, este grado de desorden bien puede ser controlado por la entropía de Von Neumann ya que dará información del intercambio de información que existió entre cada transición. Por medio de una simulación numérica se conoce el comportamiento de las irradiancias de los campos que se han denominado modos markovianos, lo que da paso a una aplicación de estos modos en el área de la holografía.

Finalmente, tanto el grabado del holograma y la iluminación de éste con los modos markovianos fue de interés por las propiedades que resultan de manejar cierto grado de evolución del modo, además de ver impacto del factor de peso de las amplitudes al ser recuperado el holograma. Estos comportamientos llaman la atención para su aplicación en el estudio de plasmones sobre superficies rugosas [20] o el análisis de la transmisión sobre el grabado de múltiples hologramas [16]. Con todo lo anterior, se puede decir que los modos Markovianos son una buena propuesta para desarrollar diferentes procedimientos en los cuales se requiera la variación de un campo.

Lista de Figuras

2.1	Arreglo del interferómetro de Michelson, donde S es una fuente extendida, DH es un divisor de haz, M_1 y M_2 son los espejos.	6
2.2	Arreglo del interferómetro de Young.	7
2.3	Descripción gráfica de una variable aleatoria.	8
2.4	Descripción gráfica de variable aleatoria dependiente en el tiempo, llamado proceso estocástico.	9
2.5	Variable aleatoria en distintos tiempos	9
2.6	Conceptualización de correlación entre dos puntos distintos a tiempos distintos	10
2.7	Arreglo del interferómetro de Young con una fuente de iluminación incoherente	14
2.8	Ejemplo de aplicación del Teorema de Bayes	18
3.1	Modelo de Ehrenfest: intercambio de r partículas de una urna blanca a una negra.	30
3.2	Función del logaritmo natural, $Ln(x)$, con línea azul. La línea roja representa el intervalo donde se hallan los valores de probabilidad de los coeficientes resultantes de las cadenas de Markov	34
3.3	Función de entropía $s(\alpha) = -\alpha Ln(\alpha)$	35
3.4	Modelo de Ehrenfest con $p = \gamma$ probabilidad de que pase la pelotita a la otra urna y $q = \frac{1}{r-1}$ probabilidad de que una pelotita sea seleccionada de la urna, en este caso $r = 4$	38
3.5	Evolución del vector de entrada en las componentes $\alpha_n(1)$ y $\alpha_n(2)$	40
3.6	Evolución del vector de entrada en las componentes $\alpha_n(3)$ y $\alpha_n(4)$	40
3.7	El tener un vector de probabilidades bien definido con un solo elemento actuando, hace que la información arrojada por la entropía sea mínima, sin embargo, cuando esta información se distribuye entre cada una de las componentes del vector de salida, indica que la entropía alcanza un máximo, es decir, ha habido un intercambio de información entre los elementos que la componen.	42
3.8	Irradiancia del modo markoviano cuando $n = 0$ y su vector de probabilidades es $\alpha_0 = (1, 0, 0, 0)$	44
3.9	Irradiancia de modo markoviano cuando $n = 1$ y su vector de probabilidades es $\alpha_1 = (1/2, 1/2, 0, 0)$	45

3.10 Irradiancia del modo markoviano cuando $n = 2$ y su vector de probabilidades es $\alpha_2 = (\frac{4}{12}, \frac{6}{12}, \frac{2}{12}, 0)$	46
3.11 Irradiancia del modo markoviano cuando $n = 3$ y su vector de probabilidades es $\alpha_3 = (0.25, 0.4722, 0.25, 0.0278)$	47
3.12 Irradiancia del modo markoviano cuando $n = 25$ y su vector de probabilidades es $\alpha_{25} = (0.125, 0.375, 0.375, 0.125)$	48
4.1 a) Proceso de grabado sobre una placa fotorefractiva: $S(x, y)$ es la onda objeto y $R(x, y)$ es la onda de referencia, generando patrón de interferencia $h(x, y)$; b) Proceso de reconstrucción del holograma: $g(x, y)$ es la onda de referencia con que se ilumina el holograma $h(x, y)$ a una inclinación u_0 respecto al eje de propagación.	50
4.2 Interferencia de dos modos markovianos, siendo una onda objeto $S(x, y)$ y una onda referencia $R(x, y)$ respectivamente, con inclinación $u_0 = \pi/8$ respecto al eje de propagación z	53
4.3 Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ con iluminación perpendicular de un modo markoviano de referencia $g(x, y)$	54
4.4 Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ sin términos cruzados, iluminado con un modo markoviano de referencia $g_{25}(x, y)$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa.	55
4.5 Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ sin términos cruzados, iluminado con un modo markoviano de referencia $g_0(x, y)$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa.	56
4.6 Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ sin términos cruzados, iluminado con un modo markoviano de referencia $g_1(x, y)$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa.	57
4.7 Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ sin términos cruzados, iluminado con un modo markoviano de referencia $g_2(x, y)$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa.	58
4.8 Reconstrucción del holograma $h(x, y)$ con términos cruzados, iluminado con una onda plana de referencia $g(x, y) = e^{ikz}$, incidiendo perpendicularmente sobre la placa.	59

Lista de Tablas

3.1	Valores de entropía del vector de probabilidad resultante durante la evolución del tiempo	41
-----	---	----

Bibliografía

- [1] G.B. Arfken, H.J. Weber, and F.E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier, 2012.
- [2] Richard Barakat and Christian Brosseau. Von neumann entropy of n interacting pencils of radiation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(3):529–532, Mar 1993.
- [3] M.J. Beran and G.B. Parrent. *Theory of partial coherence*. Society of Photo-optical Instrumentation Engineers, 1974.
- [4] N. H. Bingham. Fluctuation theory for the ehrenfest urn. *Advances in Applied Probability*, 23(3):598–611, 1991.
- [5] M. Born, E. Wolf, and A.B. Bhatia. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, 1999.
- [6] Yung-Pin Chen. Which design is better? ehrenfest urn versus biased coin. *Advances in Applied Probability*, 32(3):738–749, 2000.
- [7] Yung-Pin Chen. A central limit property under a modified ehrenfest urn design. *Journal of Applied Probability*, 43(2):409–420, 2006.
- [8] A. Di Bucchianico, H. Läuter, and H.P. Wynn. *MODA 7 - Advances in Model-Oriented Design and Analysis: Proceedings of the 7th International Workshop on Model-Oriented Design and Analysis held in Heeze, The Netherlands, June 14–18, 2004*. Contributions to Statistics. Physica-Verlag HD, 2012.
- [9] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley series in probability and mathematical statistics: Probability and mathematical statistics. Wiley, 1971.

-
- [10] P. Hariharan. *Optical Holography: Principles, Techniques and Applications*. Cambridge Studies in Modern Optics. Cambridge University Press, 1996.
- [11] Hanna Lajunen, Jani Tervo, Jari Turunen, Pasi Vahimaa, and Frank Wyrowski. Spectral coherence properties of temporally modulated stationary light sources. *Opt. Express*, 11(16):1894–1899, Aug 2003.
- [12] Hanna Lajunen, Jani Tervo, and Pasi Vahimaa. Theory of spatially and spectrally partially coherent pulses. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(8):1536–1545, Aug 2005.
- [13] G.F. Lawler. *Introduction to Stochastic Processes, Second Edition*. Chapman & Hall/CRC Probability Series. Taylor & Francis, 2006.
- [14] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [15] G. Martínez Niconoff, M. A. Torres Rodriguez, G. Díaz Gonzalez, P. Martínez Vara, R. Suarez Xique, and A. Carbajal Dominguez. Markovian optical modes. *Opt. Lett.*, 40(6):863–866, Mar 2015.
- [16] G. Martnez Niconoff, G. Daz Gonzlez, P. Martnez Vara, J. Silva Barranco, and J. Munoz-Lopez. Bifurcation effects generated with holographic rough surfaces. In Emilia Mihaylova, editor, *Holography - Basic Principles and Contemporary Applications*, chapter 10. InTech, Rijeka, 2013.
- [17] E. Parzen. *Modern Probability Theory and Its Applications*. A Wiley publication in mathematical statistics. John Wiley & Sons, Incorporated, 1960.
- [18] Jani Tervo, Tero Setälä, and Ari T. Friberg. Degree of coherence for electromagnetic fields. *Opt. Express*, 11(10):1137–1143, May 2003.
- [19] Jani Tervo, Tero Setälä, and Ari T. Friberg. Theory of partially coherent electromagnetic fields in the space–frequency domain. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(11):2205–2215, Nov 2004.
- [20] C. S. West and K. A. O’Donnell. Scattering by plasmon polaritons on a metal surface with a detuned roughness spectrum. *Opt. Lett.*, 21(1):1–3, Jan 1996.

- [21] E. Wolf. *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*. Cambridge University Press, 2007.