



INAOE

Optomecánica cuántica operacional

Por

Christian Ventura Velázquez
Lic. en Física y Matemáticas, ESFM-IPN

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en la especialidad de Óptica

en el

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica
Agosto 2015
Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Blas Manuel Rodríguez Lara,
Dr. Héctor Manuel Moya Cessa
Investigadores titulares del INAOE

©INAOE 2015

Derechos reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes.





Abstract

Through this thesis, the standard optomechanical system is studied in three different cases: driven by a monochromatic laser, interacting with the environment, and including a two-level atom in the cavity. Operator techniques, such as unitary transformations and superoperators, are used to study the three frameworks.

Resumen

En esta tesis se estudia el sistema optomecánico estándar en tres escenarios: cuando es bombeado por un láser monocromático, cuando el oscilador mecánico interactúa con el medio ambiente, y cuando un átomo de dos niveles, qubit, es introducido en la cavidad.

Para estudiar tales escenarios se hace uso de técnicas operacionales, transformaciones unitarias y superoperadores. Estas técnicas nos permiten pasar del Hamiltoniano inicial del problema a otros ya conocidos, para los cuales se conocen soluciones aproximadas.

Dedicatorias y agradecimientos

Dedico esta tesis a:

1. mis padres por siempre darme su apoyo, pero en especial a mi mamá por ser mi mejor maestra,
2. a Chofis quien cambio nuestras vidas para bien,
3. y mis mejores amigos, La Plebe XD, con quienes me diverti y aprendí mucho,

Agradezco profundamente a:

1. mis buenos profesores porque con ellos fue sencillo lo difícil,
2. mis asesores, Dr. Blas y Dr. Héctor, por tener paciencia y enseñarme a ser mejor investigador,
3. CONACyT por becarme durante los dos años de maestría y ser siempre puntuales,
4. y la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN donde aprendí el gusto por la física.

Índice general

1. Efectos mecánicos de la luz	1
1.1. El modelo cuántico	2
2. El sistema optomecánico estándar	5
2.1. Sistema con bombeo	5
2.2. Amortiguamiento del oscilador mecánico	8
2.3. Sistema con un qubit	10
3. Conclusiones	13
A. Artículos publicados en revistas internacionales como producto de las investigaciones realizadas en esta tesis	15

Capítulo 1

Efectos mecánicos de la luz

La luz, originada de fuentes coherentes o incoherentes, produce efectos mecánicos sobre la materia, debido a que es portadora de momento lineal y angular y, por lo, tanto es capaz de ejercer presión. John H. Poynting, en su libro de 1910 [1], nos explica cómo es que la luz ejerce presión sobre los objetos y para esto hace uso del conocimiento que tenemos de los resortes, es decir, cuando los comprimimos almacenan más energía y por lo tanto son capaces de ejercer mayor presión, lo mismo sucede con la luz, a menor longitud de onda, λ , más energía y puede ejercer mayor presión.

En el siglo XVII, Johannes Kepler [2] observó que las colas de los cometas apuntaban en dirección opuesta al Sol e imaginó que la luz del Sol era la causante, con esto comenzó la idea de que la luz era capaz de ejercer alguna clase de fuerza sobre los objetos. Después, en el siglo XVIII, Isaac Newton concibió a la luz como pequeñas partículas o corpúsculos y, gracias a eso, se entendió de forma más natural su capacidad de transferir momento y, por lo tanto, ejercer presión. Aunque la teoría newtoniana ganó mucha aceptación, fue hasta el siglo XIX, principalmente con los trabajos de Thomas Young y Augustin Jean Fresnel, que se comprobó que ésta era incompleta al no poder explicar la difracción, con lo cual la teoría ondulatoria fue probada y aceptada; pero no se sabía qué tipo de onda era la luz.

A la par, se desarrollaban de forma separada las investigaciones en electricidad y magnetismo, pero en 1865 James Clerk Maxwell [3–5] unió estos dos campos en la teoría electromagnética y fue dentro de ésta que surgieron matemáticamente las ondas electromagnéticas cuya velocidad de propagación resultó ser la velocidad de la luz, c , lo cual llevó a Maxwell a pensar que la luz era una onda electromagnética. Entre 1887 y 1888, Heinrich Hertz comprobó experimentalmente [6] que la luz era una onda electromagnética o radiación electromagnética. Maxwell también predijo que las ondas electromagnéticas eran portadoras de momento lineal y angular y, por lo tanto, podían ejercer presión sobre la materia. Aunque se realizaron varios experimentos para poder medir dicha presión, fue hasta los primeros años del siglo XX que Lebedev en Rusia [7] y Nichols y Hull en E.U.A. [8,9] realizaron experimentos más sofisticados y cuidados con los cuales se midió la presión que ejerce la luz.

Aunque se creía que la luz era un ente físico continuo y, por lo tanto, también su energía y momento, fue hasta el año 1900 cuando Max Planck, en su investigación teórica sobre el espectro de radiación del cuerpo negro, introdujo la hipótesis cuántica [10]. En ésta se discretiza a la radiación en paquetes cuya unidad de energía elemental es $\epsilon = h\nu$, siendo h la constante de Planck y ν la frecuencia de la luz. La cuantización no fue aceptada de inmediato, era una idea revolucionaria, pero Albert Einstein la usó para explicar el efecto fotoeléctrico en 1905 [11] y en 1916 encontró que el momento de cada paquete o fotón está cuantizado en múltiplos enteros de $p = h/\lambda$.

Con la hipótesis de Planck surgió la mecánica cuántica y, con ella, nuevos campos de inves-

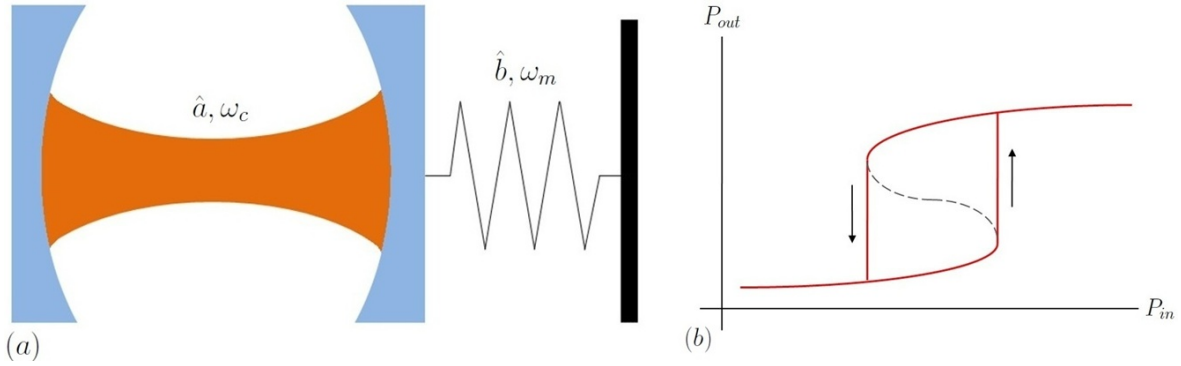


Figura 1.1: Representación esquemática de: a) el sistema optomecánico estándar, y b) el fenómeno de biestabilidad observado en tal sistema.

tigación. Uno de ellos fue el estudio de las interacciones de la radiación con la materia a nivel atómico. Pero la cuantización del campo electromagnético en el espacio libre la realizó Paul A. M. Dirac [12, 13], obteniendo como resultado que éste se comporta como un conjunto infinito de osciladores armónicos cuánticos con diferentes frecuencias de vibración [14]; esto sería fundamental para la óptica cuántica.

Por otra parte, Einstein en 1916 desarrolló la teoría de la emisión estimulada que sería la base para la invención del láser [15–18]. Con esta fuente de radiación de mayor potencia y coherencia fueron posibles varios experimentos. Tres campos de investigación surgieron: 1) V. B. Braginsky *et al.* en Moscú [19–21] en sus investigaciones teóricas sobre los efectos de la presión de radiación en los interferómetros para la detección de ondas gravitacionales comenzaron el bosquejo de las cavidades optomecánicas; 2) A. Ashkin *et al.* en Nueva Jersey [22–24] iniciaron el campo de la manipulación de objetos microscópicos usando láseres, fundando la técnica de las pinzas ópticas; 3) T. W. Hänsch y A. L. Schawlow en California [25] y V. S. Letokhov *et al.* en Moscú [26] fueron los pioneros en el enfriamiento usando láseres. A nosotros nos interesa el primero.

Fue hasta 1983, en Alemania, que A. Dorsel *et al.* [27] realizaron el primer experimento de un sistema optomecánico: una cavidad de Fabry-Pérot con uno de sus espejos fijo y el otro de poca masa suspendido de tal forma que oscila como un péndulo debido a la presión de la radiación. En tal experimento se encontró el fenómeno de biestabilidad en la potencia de salida en función de la potencia del láser de entrada (Figura 1.1).

1.1. El modelo cuántico

En 1985, P. Meystre *et al.* [28], usando teoría electromagnética clásica, dieron una explicación teórica sobre el efecto de biestabilidad mencionado en el párrafo anterior. Posteriormente se comenzó a tomar en cuenta los efectos cuánticos dentro de interferómetros [29–31] y a principios de la década de 1990 describió el modelo cuántico de la interacción del espejo oscilante con la presión de radiación en la cavidad [31, 32], es decir, presentó el Hamiltoniano ideal

$$\hat{H}_0 = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \quad (1.1)$$

donde el modo electromagnético (mecánico) con frecuencia ω_c (ω_m) está descrito por los operadores bosónicos de aniquilación y creación \hat{a} , \hat{a}^\dagger (\hat{b} , \hat{b}^\dagger), y g es la constante de acoplamiento lineal dispersivo entre los modos electromagnético y mecánico.

Los sistemas optomecánicos son fuertes candidatos para observar efectos cuánticos a macro-escala y también para medir con precisión fuerzas muy pequeñas. Por otra parte, con el sistema cuántico se pueden generar estados enredados, comprimidos, no-Gaussianos, y otra aplicación es el enfriamiento del oscilador mecánico [33]. En años recientes, se ha sustituido al espejo oscilante por una partícula esférica o un toroide, entre muchos otros entes físicos [34], para obtener mejores resultados experimentales.

Capítulo 2

El sistema optomecánico estándar

Las transformaciones unitarias son una herramienta matemática de gran utilidad porque conservan la norma y las observables físicas en el espacio de Hilbert [35]. Sabiendo esto, aplicaremos varias transformaciones unitarias a tres diferentes escenarios del sistema optomecánico estándar: con bombeo, considerando el amortiguamiento del oscilador mecánico y acoplamiento con un qubit. Los resultados obtenidos revelan diferentes aspectos para cada sistema, por ejemplo, el sistema optomecánico es equivalente a un medio Kerr y en presencia de bombeo, con un láser monocromático, se obtienen comportamientos característicos de un ión atrapado. Por otra parte, cuando tomamos en cuenta el amortiguamiento del oscilador mecánico tenemos que incluir técnicas de superoperadores en el análisis, es decir, la dinámica del sistema se obtiene con la ecuación maestra en la forma de Linblad.

2.1. Sistema con bombeo

Consideraremos que el sistema optomecánico se bombea con un láser monocromático de frecuencia ω_p . Tal sistema está descrito por el Hamiltoniano,

$$\hat{H}_p = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + 2\Omega \cos(\omega_p t) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (2.1)$$

donde 2Ω es una constante relacionada con la raíz cuadrada de la potencia del láser. Usaremos la transformación unitaria

$$\hat{U}_R(t) = e^{-i\omega_p \hat{a}^\dagger \hat{a} t}, \quad (2.2)$$

para movernos al marco definido por el número de fotones de la cavidad rotando a la frecuencia ω_p , es decir,

$$|\psi\rangle = \hat{U}_R(t) |\phi\rangle. \quad (2.3)$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación de Schrödinger tenemos

$$i\partial_t |\phi\rangle = \hat{U}_R^\dagger(t) \left[\hat{H}_p - \omega_p \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] \hat{U}_R(t) |\phi\rangle, \quad (2.4)$$

por lo que el Hamiltoniano en el marco rotante es

$$\hat{H}_R = \delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \Omega \left[(1 + e^{2i\omega_p t}) \hat{a}^\dagger + (1 + e^{-2i\omega_p t}) \hat{a} \right], \quad (2.5)$$

y en la aproximación de onda rotante (RWA, por sus siglas en inglés), sin tomar en cuenta los términos que giran rápido, $e^{\pm 2i\omega_m t}$, siempre y cuando $\omega_p \gg \Omega$, el Hamiltoniano (2.5) se reduce a la siguiente expresión

$$\hat{H}_c = \delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \Omega (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (2.6)$$

donde $\delta = \omega_c - \omega_p$ es la sintonía entre las frecuencia de la cavidad y el láser de bombeo.

Con la finalidad de eliminar los términos que involucran la intensidad del campo en la cavidad, $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, y la posición del oscilador, $\hat{b}^\dagger + \hat{b}$, usaremos el operador de desplazamiento en la base del oscilador mecánico,

$$\hat{D}_{\hat{b}}(\hat{\varepsilon}) = \exp(\hat{\varepsilon} \hat{b}^\dagger - \hat{\varepsilon}^\dagger \hat{b}), \quad (2.7)$$

donde $\hat{\varepsilon} = \alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces, para $\alpha = g/\omega_m$ el Hamiltoniano es

$$\hat{H}_D = \hat{D}_{\hat{b}}^\dagger(\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{H}_c \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}), \quad (2.8a)$$

$$= \delta \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{g^2}{\omega_m} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \Omega \left[\hat{a}^\dagger \hat{D}_{\hat{b}}^\dagger(\alpha) + \hat{a} \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha) \right]. \quad (2.8b)$$

En esta ecuación se observa que la interacción se hace más complicada, es decir,

$$\hat{D}_{\hat{b}}^\dagger(\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a}^\dagger \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}) = \hat{a}^\dagger \hat{D}_{\hat{b}}^\dagger(\alpha), \quad (2.9a)$$

$$\hat{D}_{\hat{b}}^\dagger(\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a} \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}) = \hat{a} \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha). \quad (2.9b)$$

Ahora, para movemos al marco definido por la intensidad del campo en la cavidad rotando a la frecuencia de sintonía δ y el número de excitaciones mecánicas a la frecuencia ω_m , usaremos la transformación unitaria

$$\hat{U}_{cm}(t) = e^{-i(\delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b})t}, \quad (2.10)$$

entonces tenemos que el Hamiltoniano en el marco rotante es

$$\hat{H}_{cm} = \hat{U}_{cm}^\dagger(t) \left[\hat{H}_D - (\delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b}) \right] \hat{U}_{cm}(t), \quad (2.11a)$$

$$= -\frac{g^2}{\omega_m} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + \Omega \left[\hat{a}^\dagger e^{i\delta t} \hat{D}_{\hat{b}}^\dagger(\alpha e^{i\omega_m t}) + \hat{a} e^{-i\delta t} \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha e^{i\omega_m t}) \right], \quad (2.11b)$$

ya que se tiene

$$\hat{U}_{cm}^\dagger(t) \hat{a}^\dagger \hat{D}_{\hat{b}}^\dagger(\alpha) \hat{U}_{cm}(t) = \hat{a}^\dagger e^{i\delta t} \hat{D}_{\hat{b}}^\dagger(\alpha e^{i\omega_m t}), \quad (2.12a)$$

$$\hat{U}_{cm}^\dagger(t) \hat{a} \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha) \hat{U}_{cm}(t) = \hat{a} e^{-i\delta t} \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha e^{i\omega_m t}). \quad (2.12b)$$

Es fácil ver que, en ausencia de bombeo, $\Omega = 0$, el Hamiltoniano (2.11b) es equivalente al de un medio Kerr, es decir,

$$\hat{H}_{cm}(\Omega = 0) = \hat{H}_K \quad (2.13a)$$

$$= -\frac{g^2}{\omega_m} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2. \quad (2.13b)$$

Por otro lado, vemos que el segundo término de (2.11b) es equivalente al Hamiltoniano de un ión atrapado [36], entonces usando las técnicas de tal sistema podemos desarrollar los operadores de desplazamiento en la siguiente forma

$$\hat{D}_b^\dagger(\alpha e^{i\omega_m t}) = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \left(-\alpha \hat{b}^\dagger\right)^p \left(\alpha \hat{b}\right)^q e^{i\omega_m(p-q)t}, \quad (2.14a)$$

$$\hat{D}_b(\alpha e^{i\omega_m t}) = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \left(\alpha \hat{b}^\dagger\right)^p \left(-\alpha \hat{b}\right)^q e^{i\omega_m(p-q)t}. \quad (2.14b)$$

Escogiendo la sintonía como $\delta = \pm s\omega_m$ con $s \in \mathbb{N}$ y aplicando la RWA obtenemos para $\delta = +s\omega_m$,

$$\begin{aligned} \hat{H}_+ = \hat{H}_K + \Omega e^{-|\alpha|^2/2} & \left[\hat{a} \left(\alpha \hat{b}^\dagger\right)^s \frac{\left(\hat{b}^\dagger \hat{b}\right)!}{\left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + s\right)!} L_{\hat{b}^\dagger \hat{b}}^s(\alpha^2) \right. \\ & \left. + \hat{a}^\dagger \frac{\left(\hat{b}^\dagger \hat{b}\right)!}{\left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + s\right)!} L_{\hat{b}^\dagger \hat{b}}^s(\alpha^2) \left(\alpha \hat{b}\right)^s \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

y para $\delta = -s\omega_m$,

$$\begin{aligned} \hat{H}_- = \hat{H}_K + \Omega e^{-|\alpha|^2/2} & \left[\hat{a} \frac{\left(\hat{b}^\dagger \hat{b}\right)!}{\left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + s\right)!} L_{\hat{b}^\dagger \hat{b}}^s(\alpha^2) \left(-\alpha \hat{b}\right)^s \right. \\ & \left. + \hat{a}^\dagger \left(-\alpha \hat{b}^\dagger\right)^s \frac{\left(\hat{b}^\dagger \hat{b}\right)!}{\left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + s\right)!} L_{\hat{b}^\dagger \hat{b}}^s(\alpha^2) \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $L_n^m(x)$ es el polinomio asociado de Laguerre dado por [37]

$$L_n^m(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} \frac{(n+m)!}{(n-k)!(m+k)!}, \quad m \geq 0. \quad (2.17)$$

Para diferentes valores de s es posible obtener diferentes acoplamientos. Por ejemplo, para $g \ll \omega_m$, es decir $\alpha \approx 0$, tenemos de forma general

$$\hat{H}_+ \approx \hat{H}_K + \frac{\Omega}{s!} \left[\hat{a} \left(\alpha \hat{b}^\dagger\right)^s + \hat{a}^\dagger \left(\alpha \hat{b}\right)^s \right], \quad (2.18a)$$

$$\hat{H}_- \approx \hat{H}_K + \frac{\Omega}{s!} \left[\hat{a} \left(-\alpha \hat{b}\right)^s + \hat{a}^\dagger \left(-\alpha \hat{b}^\dagger\right)^s \right]. \quad (2.18b)$$

Si $\delta = +\omega_m$, obtenemos con (2.18a) el Hamiltoniano efectivo

$$\hat{H}_+^{(1)} \approx \hat{H}_K + \alpha \Omega \left(\hat{a} \hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{b} \right), \quad (2.19)$$

el segundo término es análogo al Hamiltoniano de un divisor de haz, este nos indica que existe un intercambio de energía entre el campo en la cavidad y el oscilador mecánico, es decir, se puede enfriar el espejo al transformar sus fonones térmicos en fotones del campo en la cavidad [38], pero

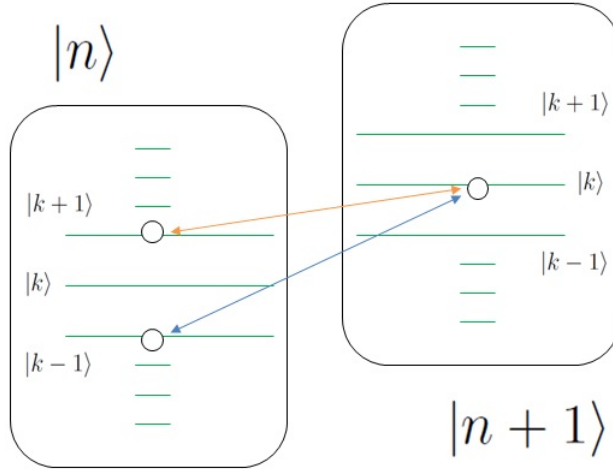


Figura 2.1: Representación esquemática de las transiciones debidas a los Hamiltonianos (2.19) y (2.20), en rojo y azul respectivamente, omitiendo el término Kerr porque $\omega_m \alpha^2 = g^2/\omega_m \ll 1$. La letra n (m) representa el número de fotones (fonones).

también pueden transferir sus estados cuánticos [39]. Con $\delta = -\omega_m$, según (2.18b) se tiene el Hamiltoniano efectivo

$$\hat{H}_-^{(1)} \approx \hat{H}_K - \alpha \Omega \left(\hat{a} \hat{b} + \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \right), \quad (2.20)$$

el segundo término corresponde a la amplificación paramétrica no degenerada que es capaz de generar pares de un fotón con un fonón [39, 40], pero también nos expresa que se pueden enredar cuánticamente el modo óptico con el mecánico [39, 41].

2.2. Amortiguamiento del oscilador mecánico

Ahora consideraremos al sistema optomecánico sin bombeo pero con el oscilador mecánico amortiguado. La dinámica del sistema esta dada por la ecuación maestra,

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -i \left[\hat{H}_0, \hat{\rho} \right] + \gamma \hat{\mathcal{L}}_b [\hat{\rho}], \quad (2.21)$$

donde $\hat{\rho}$ es el operador de densidad del sistema, \hat{H}_0 es dado por los tres primeros términos de (2.1), la tasa de decaimiento del oscilador mecánico es γ y el superoperador de Linblad es dado por

$$\hat{\mathcal{L}}_b [\hat{\rho}] = 2\hat{b}\hat{\rho}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{b}^\dagger\hat{b}. \quad (2.22)$$

Usaremos la transformación unitaria

$$\hat{U}_c(t) = e^{-i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t}, \quad (2.23)$$

para movernos al marco definido por el número de fotones a la frecuencia ω_c , es decir,

$$\hat{\rho} = \hat{U}_c^\dagger(t) \hat{\rho}_c \hat{U}_c(t). \quad (2.24)$$

Entonces, la ecuación maestra queda de la forma

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_c = -i \left[\hat{H}_m, \hat{\rho}_c \right] + \gamma \hat{\mathcal{L}}_{\hat{b}} [\hat{\rho}_c], \quad (2.25)$$

con

$$\hat{H}_m = \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} \left(\hat{b}^\dagger + \hat{b} \right). \quad (2.26)$$

Ahora, aplicaremos el operador de desplazamiento (2.7) con $\hat{\varepsilon} = \beta \hat{a}^\dagger \hat{a}$ y $\beta \in \mathbb{C}$ al operador de densidad $\hat{\rho}_c$, es decir,

$$\hat{\rho}_c = \hat{D}_{\hat{b}} (\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\rho}_D \hat{D}_{\hat{b}}^\dagger (\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}), \quad (2.27)$$

sustituyendo en (2.25) tenemos

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_D = -i \hat{D}_{\hat{b}}^\dagger (\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}) \left\{ \left[\hat{H}_m, \hat{\rho}_c \right] + \gamma \hat{\mathcal{L}}_{\hat{b}} [\hat{\rho}_c] \right\} \hat{D}_{\hat{b}} (\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}), \quad (2.28a)$$

$$= -i \left[\hat{H}_D, \hat{\rho}_D \right] + \gamma \hat{D}_{\hat{b}}^\dagger (\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\mathcal{L}}_{\hat{b}} [\hat{\rho}_c] \hat{D}_{\hat{b}} (\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}), \quad (2.28b)$$

$$= -i \left[\hat{H}_D, \hat{\rho}_D \right] + \gamma \hat{\mathcal{L}}_{\hat{b}} [\hat{\rho}_D] + \gamma \hat{\mathcal{L}}_{\hat{a}^\dagger \hat{a}} [\hat{\rho}_D] \\ + \gamma \beta \hat{\mathcal{N}} [\hat{\rho}_D] + \gamma \beta^* \hat{\mathcal{N}}^\dagger [\hat{\rho}_D], \quad (2.28c)$$

donde el Hamiltoniano desplazado es

$$\hat{H}_D = \epsilon (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \left(\mu \hat{b}^\dagger + \mu^* \hat{b} \right). \quad (2.29)$$

Con los parámetros,

$$\epsilon = 2g \operatorname{Re}(\beta) + \omega_m |\beta|^2, \quad (2.30)$$

$$\mu = g + \omega_m \beta, \quad (2.31)$$

y el nuevo superoperador $\hat{\mathcal{N}}$ es

$$\hat{\mathcal{N}} [\hat{\rho}_D] = 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_D \hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_D - \hat{\rho}_D \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (2.32)$$

La ecuación maestra (2.28c) es la que describe la dinámica del sistema en el marco rotante y desplazado. Para conseguir una solución analítica consideremos que podemos escribir a $\hat{\rho}_D(0)$ como

$$\hat{\rho}_D(0) = \hat{\rho}_c(0) \otimes \hat{\rho}_m(0), \quad (2.33)$$

donde $\hat{\rho}_c(0)$ y $\hat{\rho}_m(0)$ son los operadores de densidad del campo en la cavidad y del oscilador mecánico, respectivamente. Pero, suponiendo que $\hat{\rho}_c(0)$ es un campo térmico

$$\hat{\rho}_c(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^k}{(\bar{n} + 1)^{k+1}} |k\rangle \langle k|, \quad (2.34)$$

siendo \bar{n} el número promedio de fotones en la cavidad, y sustituyendo en (2.29) se obtiene que

$$\beta = -\frac{g}{\omega_m - i\gamma}. \quad (2.35)$$

Con lo anterior, la ecuación maestra (2.28c) pasa a una forma más simple

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_D = -i \left[\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{\rho}_D \right] + \gamma \hat{\mathcal{L}}_b [\hat{\rho}_D], \quad (2.36)$$

es decir, el Hamiltoniano efectivo para el campo térmico en la cavidad se reduce al del oscilador armónico mecánico. Finalmente la evolución temporal del operador de densidad para este caso es

$$\hat{\rho}_D(t) = e^{\hat{L}t} e^{f(\gamma)\hat{J}t} \left[e^{-i\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} t} \hat{\rho}_D(0) e^{i\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} t} \right], \quad (2.37)$$

donde se han definido la función $f(\gamma)$ y los superoperadores como

$$f(\gamma) = \frac{1 - e^{-2\gamma}}{2\gamma}, \quad (2.38a)$$

$$\hat{L}[\hat{\rho}] = -\gamma \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{b}^\dagger \hat{b} \right), \quad (2.38b)$$

$$\hat{J}[\hat{\rho}] = 2\gamma \hat{b} \hat{\rho} \hat{b}^\dagger. \quad (2.38c)$$

2.3. Sistema con un qubit

Si un qubit, sistema de dos niveles, es colocado en el sistema optomecánico sin bombeo, entonces ese sistema híbrido esta descrito por el Hamiltoniano [42–45]

$$\hat{H}_h = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \lambda (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (2.39)$$

donde los dos últimos términos son del modelo de Jaynes-Cummings [46]. Siendo ω_0 es la frecuencia de transición del qubit, λ la constante de acoplamiento del qubit con el campo en la cavidad y $\hat{\sigma}_j$ con $j = \pm, z$ las matrices de Pauli.

Nos moveremos al marco definido por el número de fotones y la energía del qubit rotando a la frecuencia de la cavidad, es decir, aplicaremos la transformación unitaria

$$\hat{U}_r(t) = e^{-i\omega_c(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_z/2)t}, \quad (2.40)$$

con lo cual, el Hamiltoniano en el marco rotante es

$$\hat{H}_r = \hat{U}_r^\dagger(t) \left[\hat{H}_h - \omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}_z}{2} \right) \right] \hat{U}_r(t), \quad (2.41a)$$

$$= \frac{\delta}{2} \hat{\sigma}_z + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \lambda (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (2.41b)$$

donde la sintonía entre las frecuencias del qubit y la cavidad es $\delta = \omega_0 - \omega_c$.

Ahora, utilizaremos las transformaciones unitarias por la derecha

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{V} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}^\dagger = \begin{pmatrix} \hat{V}^\dagger & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

donde

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}} \hat{a}, \quad \hat{V}^\dagger = \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}}, \quad (2.43)$$

son los operadores de Susskind-Glogower, que cumplen

$$\hat{V}\hat{V}^\dagger = \mathbb{I}, \quad (2.44a)$$

$$\hat{V}^\dagger\hat{V} = \mathbb{I} - |0\rangle\langle 0|, \quad (2.44b)$$

siendo \mathbb{I} el operador unidad. Por tanto, las transformaciones definidas en (2.42) cumplen

$$\hat{T}\hat{T}^\dagger = \mathbb{I}_2, \quad (2.45a)$$

$$\hat{T}^\dagger\hat{T} = \mathbb{I}_2 - |0\rangle\langle 0| |e\rangle\langle e|, \quad (2.45b)$$

donde \mathbb{I}_2 es la matriz unidad de tamaño 2×2 . Con esto, tenemos que

$$\hat{H}_r = \hat{T}\hat{H}_T\hat{T}^\dagger \quad (2.46a)$$

$$= \frac{\delta}{2}\hat{\sigma}_z + \omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b} + \lambda\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{\sigma}_x - g(\hat{a}^\dagger\hat{a} - |e\rangle\langle e|)(\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \quad (2.46b)$$

y, reescribiendo el último término, llegamos al siguiente Hamiltoniano

$$\hat{H}_T = \left[\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}g(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right] \hat{\sigma}_z + \omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b} + \lambda\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{\sigma}_x - g\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)(\hat{b}^\dagger + \hat{b}). \quad (2.47)$$

Aplicando el operador de desplazamiento,

$$\hat{D}_{\hat{b}} \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right] = \exp \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2} \right) (\hat{b}^\dagger - \hat{b}) \right], \quad (2.48)$$

para diagonalizar (2.47) en la base de los fotones, obtenemos

$$\hat{H}_D = \hat{D}_{\hat{b}}^\dagger \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \hat{H}_T \hat{D}_{\hat{b}} \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (2.49a)$$

$$= \left[\frac{\delta}{2} + \frac{g}{2}(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \frac{g^2}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \hat{\sigma}_z + \omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b} + \lambda\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{\sigma}_x - \frac{g^2}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (2.49b)$$

Por claridad, haremos una rotación alrededor del $\hat{\sigma}_y$ con la transformación unitaria

$$\hat{R}_y(\theta) = e^{-i\theta\hat{\sigma}_y} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

entonces

$$\hat{H}_{ry} = \hat{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{H}_D \hat{R}_y^\dagger\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad (2.51a)$$

$$= \omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b} + \tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\sigma}_z + \Omega(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\sigma}_x + \frac{g}{2}(\hat{b}^\dagger + \hat{b})\hat{\sigma}_x - \frac{g^2}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2} \right)^2, \quad (2.51b)$$

donde las nuevas frecuencias son dependientes del número de fotones en la cavidad y están dadas por

$$\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}) = -\lambda\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}, \quad (2.52a)$$

$$\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{\delta}{2} + \frac{g^2}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2} \right). \quad (2.52b)$$

El Hamiltoniano (2.51b) se comporta como un medio Kerr y con un qubit interactuando con los modos del oscilador mecánico en el modelo de Jaynes-Cummings sin RWA, siendo $\tilde{\omega}$ ($\hat{a}^\dagger \hat{a}$) la frecuencia de transición y Ω ($\hat{a}^\dagger \hat{a}$) sería el análogo a la fuerza del bombeo con dependencia en la intensidad del modo óptico, $\hat{a}^\dagger \hat{a}$.

Finalmente, tenemos que

$$\hat{H}_r = \hat{T} \hat{D}_b \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \hat{R}_y^\dagger \left(\frac{\pi}{4} \right) \hat{H}_{ry} \hat{R}_y \left(\frac{\pi}{4} \right) \hat{D}_b^\dagger \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \hat{T}^\dagger, \quad (2.53)$$

con esto, el operador de evolución es

$$\hat{U}(t) = \hat{T} \hat{D}_b \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \hat{R}_y^\dagger \left(\frac{\pi}{4} \right) e^{-i\hat{H}_{ry}t} \hat{R}_y \left(\frac{\pi}{4} \right) \hat{D}_b^\dagger \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \hat{T}^\dagger, \quad (2.54)$$

ya que

$$\hat{H}_r^2 = \hat{T} \hat{H}_r \hat{T}^\dagger \hat{T} \hat{H}_r \hat{T}^\dagger, \quad (2.55a)$$

$$= \hat{T} \hat{H}_r (\mathbb{I}_2 - |0\rangle\langle 0| |e\rangle\langle e|) \hat{H}_r \hat{T}^\dagger, \quad (2.55b)$$

$$= \hat{T} \hat{H}_r^2 \hat{T}^\dagger - \left[\frac{\delta}{2} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + g (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right] \hat{T} |0\rangle\langle 0| |e\rangle\langle e| \hat{T}^\dagger \left[\frac{\delta}{2} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + g (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right], \quad (2.55c)$$

$$= \hat{T} \hat{H}_r^2 \hat{T}^\dagger, \quad (2.55d)$$

y donde se ha usado

$$\hat{H}_r |0\rangle |e\rangle = \left[\frac{\delta}{2} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + g (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right] |0\rangle |e\rangle, \quad (2.56a)$$

$$\hat{T} |0\rangle\langle 0| |e\rangle\langle e| \hat{T}^\dagger = 0_2, \quad (2.56b)$$

siendo 0_2 la matriz cero de tamaño 2×2 .

Luego, podemos usar el hecho de que el término Kerr de (2.51b) conmuta con los demás términos, es decir, reescribimos $e^{-i\hat{H}_{ry}t}$ como

$$e^{-i\hat{H}_{ry}t} = e^{-i\hat{\mathcal{H}}_K t} e^{-i\hat{\mathcal{H}}_{am} t}, \quad (2.57)$$

donde los Hamiltonianos \mathcal{H} 's están dados por

$$\hat{\mathcal{H}}_K = -\frac{g^2}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right)^2, \quad (2.58a)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{am} = \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \tilde{\omega} (\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_z + \Omega (\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_x + \frac{g}{2} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \hat{\sigma}_x. \quad (2.58b)$$

Observamos que para $e^{-i\hat{\mathcal{H}}_{am}t}$ no es posible dar una forma cerrada ya que no se ha desarrollado una RWA adecuada, por el momento.

Capítulo 3

Conclusiones

Usamos métodos puramente algebraicos para estudiar el modelo cuántico del sistema optomecánico estándar, descrito por la interacción dispersiva entre dos modos bosónicos, el electromagnético y el mecánico. Mostramos que un desplazamiento en la base del modo mecánico proporcional al estado de número del campo electromagnético, también conocida como transformación de polarón, nos conduce a un modelo efectivo formado por un medio electromagnético Kerr y el acoplamiento entre ambos modos se vuelve similar al de un ión atrapado. Tomando desarrollos matemáticos aplicados al modelo de un ión atrapado, se mostró que es posible obtener diferentes modelos de interacción que permiten enfriamiento mecánico, transferencia de estados cuánticos y amplificación paramétrica no degenerada; esto se logra escogiendo una sintonía entre las frecuencias de ambos modos y del bombeo que sea múltiplos enteros de la frecuencia del modo mecánico.

Para el caso en que el oscilador mecánico se acopla con el medio ambiente, estudiamos la ecuación maestra de Linblad con técnicas de superoperadores y obtuvimos un superoperador de evolución cuando campo eléctrico inicial es térmico.

Finalmente, utilizamos operadores unitarios por la derecha para estudiar el sistema optomecánico cuántico con un átomo de dos niveles interactuando con el campo electromagnético de la cavidad. Con esa técnica encontramos que el campo electromagnético hace posible el acoplamiento entre el qubit y el modo mecánico de la forma de Jaynes-Cummings sin la aproximación de onda rotante.

Apéndice A

Artículos publicados en revistas internacionales como producto de las investigaciones realizadas en esta tesis

Invited Comment

Operator approach to quantum optomechanics

C Ventura-Velázquez, B M Rodríguez-Lara and H M Moya-Cessa

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Calle Luis Enrique Erro No. 1, Sta. Ma. Tonantzintla, Pue. CP 72840, México

E-mail: bmlara@inaoep.mx

Received 29 September 2014, revised 7 November 2014

Accepted for publication 10 November 2014

Published 13 May 2015



CrossMark

Abstract

We study the mirror-field interaction in several frameworks: when it is driven, when it is affected by an environment, and when a two-level atom is introduced in the cavity. By using operator techniques, we show either how these problems may be solved or how the Hamiltonians involved, via sets of unitary transformations, may be taken to known Hamiltonians for which there exist approximate solutions.

Keywords: mirror-field interactions, superoperators, non-classical states

1. Introduction

Light carries momentum and, therefore, it can exert pressure over matter [1, 2], be it from incoherent [3–5] or coherent [6–8] sources. Such radiation pressure allows, for example, the coupling of mechanical degrees of freedom to electromagnetic cavity modes in cavities with a moving mirror, both in the classical [9–11] and quantum regimes [12–16]. The so-called standard optomechanical model in quantum optics is modeled after a classical Fabry–Pérot resonator where one mirror is free to move in a pendulum-like motion [12]. In the beginning, the interest in this optomechanical system was focused on the detection of gravitational waves. When the effects of radiation pressure on the device were shown to be a detection issue [14], it became important to beat the standard quantum limit [17, 18]. An interesting solution to this problem is to prepare the mechanical oscillator in a non-Gaussian state [18–20]; thus quantum state engineering of the mechanical mode became important. Furthermore, it is of great interest to test quantum theory with macroscopic degrees of freedom [21–23], and quantum optomechanical systems provide an experimentally feasible testing ground and may even be a viable quantum information platform [24, 25].

The canonical quantization of a Fabry–Pérot cavity with a pendulum-like mirror delivers an ideal Hamiltonian in the

form [14, 16, 26, 27],

$$\hat{H} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \quad (1)$$

where the cavity field and mechanical oscillator modes are described by their effective frequencies, ω_c and ω_m , and creation (annihilation) operators, \hat{a}^\dagger (\hat{a}) and \hat{b}^\dagger (\hat{b}), in that order. Dispersive linear coupling between the modes occurs, and it is quantified by the coupling constant g . Here, we will revisit this and aggregated models through an operator approach. In the following section, we will show the well-known equivalence between the standard optomechanical model and a Kerr medium. We will also show that the driven optomechanical model is similar to a trapped ion, and that is the reason behind the use of sideband cooling and other ion-trap cavity electrodynamics (QED) techniques to prepare mechanical states. We will couple the mechanical mode to an environment and introduce superoperator techniques to make the problem tractable. We will introduce a new result, showing that the open system reduces to a damped mechanical oscillator in the case of a thermal electromagnetic field mode in the cavity. Finally, we will add a two-level system, interacting with the cavity field under Jaynes–Cummings dynamics, to the model. We will show that a right unitary approach allows us to understand how the electromagnetic field mode mediates coupling between the atom and the

mechanical oscillator, but a closed-form time evolution operator requires developing an adequate rotating wave approximation (RWA) compatible with the right unitary transformations.

2. Standard optomechanical model

The first experimental realization of a classical optomechanical cavity consisted of a Fabry–Perot cavity with a fixed mirror and a pendulum-like moving mirror [10]. In this experiment and other proposals [27], optical bistability and mirror confinement due to changes in the physical length of the cavity induced by radiation pressure were shown. This bistable phenomenon was similar to that found in fixed cavities filled with nonlinear media [28]. Soon, it was shown that the equations of motion of the quantum optomechanical system showed optical bistability due to its equivalence to a Kerr medium [29, 30]. Since then, the topic has been revisited through different approaches [31, 32].

2.1. Driven system

Here we are interested in an algebraic approach. For this reason we will start with the standard Hamiltonian for a pumped optomechanical system,

$$\hat{H}_p = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \Omega \cos(\omega_p t) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (2)$$

where the laser pump frequency is given by ω_p and its strength by Ω . First, we need to get rid of the time dependence, so we move to a frame defined by the cavity field photon number rotating at the pump frequency, $|\psi\rangle = \hat{U}_R(t)|\phi\rangle$, with $\hat{U}_R(t) = e^{-i\omega_p \hat{a}^\dagger \hat{a} t}$, such that we can write the Schrödinger equation as,

$$i\partial_t [\hat{U}_R(t)|\phi\rangle] = \hat{H}_p \hat{U}_R(t)|\phi\rangle. \quad (3)$$

Thus the effective Hamiltonian in the new frame,

$$i\partial_t |\phi\rangle = \hat{U}_R^\dagger(t) [\hat{H}_p - \omega_p \hat{a}^\dagger \hat{a}] \hat{U}_R(t) |\phi\rangle, \quad (4)$$

is given by the following,

$$\begin{aligned} \hat{H}_R &= \hat{U}_R^\dagger(t) [\hat{H}_p - \omega_p \hat{a}^\dagger \hat{a}] \hat{U}_R(t), \\ &= \delta_p \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \\ &\quad + \frac{\Omega}{2} \left[\hat{a}^\dagger (1 + e^{2i\omega_p t}) + \hat{a} (1 + e^{-2i\omega_p t}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Finally, we can make an RWA to eliminate the terms rotating at twice the pump frequency, $e^{\pm 2i\omega_p t}$, and obtain,

$$\hat{H}_c = \delta_p \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \frac{\Omega}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (6)$$

where the detuning between the pump and cavity field frequencies is $\delta_p = \omega_c - \omega_p$. Now, we want to get rid of the terms involving the cavity field intensity and the canonical

position of the mechanical oscillator. For this, let us define a displacement on the mechanical oscillator basis,

$$\hat{D}_b(\hat{\xi}) = e^{(\hat{\xi} \hat{b}^\dagger - \hat{\xi}^\dagger \hat{b})}, \quad (7)$$

where the operator $\hat{\xi}$ is either a cavity field operator or just a complex number. If we change into a joint basis defined by such a displacement, we arrive at a Hamiltonian closer to our goal [33, 34],

$$\begin{aligned} \hat{H}_D &= \hat{D}_b^\dagger \left(\frac{g}{\omega_m} \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \hat{H}_c \hat{D}_b \left(\frac{g}{\omega_m} \hat{a}^\dagger \hat{a} \right), \\ &= \delta_p \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{g^2}{\omega_m} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\Omega}{2} \left[\hat{a}^\dagger \hat{D}_b^\dagger \left(\frac{g}{\omega_m} \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{a} \hat{D}_b \left(\frac{g}{\omega_m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Note that moving into the joint-displaced basis defined by the operator $\hat{D}_b(g\hat{a}^\dagger\hat{a}/\omega_m)$ helps us to get rid of the linear dispersive mechanical-cavity field modes interaction but introduces a Kerr term for the cavity field, $(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2$, and switches the interaction to the driving terms that become $\hat{a}^\dagger \hat{D}_b^\dagger(g/\omega_m)$ and $\hat{a} \hat{D}_b(g/\omega_m)$. In order to reach our goal, we now move to the rotating frames defined by the intensity in the cavity field rotating at the detuning frequency and the number of excitations in the mechanical mode rotating with frequency ω_m , $\hat{U}_{cm}(t) = e^{-i(\delta_p \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b})t}$. Thus, we reach our goal,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{cm} &= \hat{U}_{cm}^\dagger(t) (\hat{H}_D - \delta_p \hat{a}^\dagger \hat{a} - \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b}) \hat{U}_{cm}(t) \\ &= -\frac{g^2}{\omega_m} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + \frac{\Omega}{2} \left[\hat{a}^\dagger e^{i\delta_p t} \hat{D}_b^\dagger \left(\frac{g}{\omega_m} e^{i\omega_m t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{a} e^{-i\delta_p t} \hat{D}_b \left(\frac{g}{\omega_m} e^{i\omega_m t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Note that in the absence of driving, $\Omega = 0$, the standard optomechanical Hamiltonian is equivalent to a Kerr Hamiltonian [29–32], and it has been shown that measuring the field quadratures of this system delivers information about the Wigner characteristic function of the mechanical oscillator [35]. Furthermore, from such a form it is straightforward to discuss light squeezing [36], photon blockade [37], and single photon dynamics [38], to mention a few examples.

In the presence of driving, the second term in the effective Hamiltonian \hat{H}_{cm} is quite interesting. Note how similar these terms are to that of a driven trapped ion [39]; as a matter of fact, if we substituted the cavity field operators with Pauli matrices, we would recover the trapped ion Hamiltonian. Thus, we can use an approach similar to that used in trapped-ion QED and expand the mechanical mode operators into

their power series,

$$\hat{D}_b^\dagger(\alpha e^{i\omega_m t}) = e^{-\frac{\omega_m^2 t}{2}} \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} (-\alpha \hat{b}^\dagger)^p (\alpha \hat{b})^q e^{i\omega_m(q-p)t}, \quad (10)$$

$$\hat{D}_b(\alpha e^{i\omega_m t}) = e^{-\frac{\omega_m^2 t}{2}} \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} (\alpha \hat{b}^\dagger)^p (-\alpha \hat{b})^q e^{-i\omega_m(q-p)t}. \quad (11)$$

If the displacement parameter, $\alpha = g/\omega_m$, fulfills $\alpha \ll 1$, the pump intensity is high, $\Omega \gg \omega_c$, and we choose the pumping detuning such that it is an integer multiple of the mirror frequency, $\delta_p = \pm s\omega_m$ with $s = 0, 1, 2, \dots$. Then we can apply an RWA to obtain, for $\delta = s\omega_m$,

$$\begin{aligned} \hat{H}_+ = & -\frac{g^2}{\omega_m} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + \frac{\Omega}{2} e^{-\frac{\omega_m^2 t}{2}} \left[\hat{a} \frac{(\hat{b}^\dagger \hat{b})!}{(\hat{b}^\dagger \hat{b} + s)!} L_{\hat{b}^\dagger \hat{b}}^{(s)}(\alpha^2) (\alpha \hat{b})^s \right. \\ & \left. + \hat{a}^\dagger (-\alpha \hat{b}^\dagger)^s \frac{(\hat{b}^\dagger \hat{b})!}{(\hat{b}^\dagger \hat{b} + s)!} L_{\hat{b}^\dagger \hat{b}}^{(s)}(\alpha^2) \right], \quad (12) \end{aligned}$$

and for $\delta = -s\omega_m$,

$$\begin{aligned} \hat{H}_- = & -\frac{g^2}{\omega_m} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + \frac{\Omega}{2} e^{-\frac{\omega_m^2 t}{2}} \left[\hat{a} (-\alpha \hat{b}^\dagger)^s \frac{(\hat{b}^\dagger \hat{b})!}{(\hat{b}^\dagger \hat{b} + s)!} \right. \\ & \left. \times L_{\hat{b}^\dagger \hat{b}}^{(s)}(\alpha^2) + \hat{a}^\dagger \frac{(\hat{b}^\dagger \hat{b})!}{(\hat{b}^\dagger \hat{b} + s)!} L_{\hat{b}^\dagger \hat{b}}^{(s)}(\alpha^2) (\alpha \hat{b})^s \right], \quad (13) \end{aligned}$$

where the function $L_n^{(m)}(x)$ is the n th Laguerre generalized polynomial with parameter m . In other words, by choosing the detuning between the cavity and pump fields, we can produce a nonlinear coupling of the cavity field with the mechanical oscillator in a form equivalent to that of a trapped-ion. Thus, we can use the knowledge from ion-trap QED to engineer quantum states in the closed or open standard optomechanical system [40–46]; e.g., sideband cooling [47–49], Schrödinger cats [33, 50], and non-Gaussian states of the mechanical oscillator [20, 51–53].

2.2. Damping of the mechanical oscillator

Now we will turn our attention to the standard optomechanical system and take into account the damping of the mechanical oscillator, such that the system dynamics is described by a master equation,

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \gamma \hat{\mathcal{L}}_b[\hat{\rho}], \quad (14)$$

where γ is the decay rate and $\hat{\rho}$ is the density operator of the system, and the Linblad superoperator is given by,

$$\hat{\mathcal{L}}_\xi[\hat{\rho}] = 2\hat{\zeta}\hat{\rho}\hat{\zeta}^\dagger - \hat{\zeta}^\dagger\hat{\zeta}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\zeta}^\dagger\hat{\zeta}. \quad (15)$$

It is straightforward to move into the frame defined by the photon number rotating at the cavity field frequency,

$\hat{U}_c(t) = e^{-i\omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} t}$; then, the master equation becomes

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_c = -i[\hat{H}_m, \hat{\rho}_c] + \gamma \hat{\mathcal{L}}_b[\hat{\rho}_c],$$

$$\hat{H}_m = \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \quad (16)$$

and $\hat{\rho}_c = \hat{U}_c(t) \hat{\rho} \hat{U}_c^\dagger(t)$. Now, we follow the standard procedure mentioned above and introduce a displacement of the mechanical degree of freedom as a function of the number of photons in the cavity, $\hat{D}_b(\beta \hat{a}^\dagger \hat{a})$ with $\beta \in \mathbb{C}$. Thus, we can write the density operator as

$$\hat{\rho}_c = \hat{D}_b(\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\rho}_D \hat{D}_b^\dagger(\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}), \quad (17)$$

and its corresponding master equation,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_D = & -i[\hat{H}_D, \hat{\rho}_D] + \gamma \left\{ \hat{\mathcal{L}}_b[\hat{\rho}_D] + \hat{\mathcal{L}}_{\hat{a}^\dagger \hat{a}}[\hat{\rho}_D] \right. \\ & \left. + \beta \hat{\mathcal{N}}[\hat{\rho}_D] + \beta^* \hat{\mathcal{N}}^\dagger[\hat{\rho}_D] \right\}, \quad (18) \end{aligned}$$

where the displaced Hamiltonian is

$$\hat{H}_D = \epsilon (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{a}^\dagger \hat{a} (\mu \hat{b}^\dagger + \mu^* \hat{b}) \quad (19)$$

with parameters,

$$\mu = g + \omega\beta, \quad (20)$$

$$\epsilon = 2g\text{Re}(\beta) + \omega|\beta|^2, \quad (21)$$

and the new superoperator is defined in the following,

$$\hat{\mathcal{N}}[\hat{\rho}] = \left(2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} \hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \right). \quad (22)$$

At this point, we can start analyzing which initial conditions of the field provide us with a master equation amenable for analytic solution. The simplest case is given by a thermal field in the cavity with an average of \bar{n} photons,

$$\hat{\rho}_{th}(\bar{n}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^k}{(1+\bar{n})^{k+1}} |k\rangle \langle k|, \quad (23)$$

leading to the following initial state of the whole system,

$$\hat{\rho}_D(0) = \hat{\rho}_{th}(\bar{n}) \otimes \hat{\rho}_m(0). \quad (24)$$

Then, we can set the value of the displacement parameter,

$$\beta = -\frac{g}{\omega_m - i\gamma}, \quad (25)$$

to get the following master equation for this particular case of initial density operator,

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_D = -i \left[\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{\rho}_D \right] + \gamma \hat{\mathcal{L}}_b[\hat{\rho}_D]. \quad (26)$$

In other words, a mechanical oscillator interacting with a thermal field cavity mode and coupled to an environment behaves just as a free mechanical harmonic oscillator coupled to an environment. Its time evolution can be given by

standard superoperator techniques [54–57],

$$\hat{\rho}_D(t) = e^{\hat{L}t} e^{\frac{1-e^{-2\gamma}}{2\gamma} \hat{J}t} \left[e^{-i\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} t} \hat{\rho}_D(0) e^{i\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} t} \right], \quad (27)$$

with the auxiliary superoperators,

$$\hat{J}\hat{\rho} = 2\gamma\hat{b}\hat{\rho}\hat{b}^\dagger, \quad \hat{L}\hat{\rho} = -\gamma(\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{b}^\dagger\hat{b}). \quad (28)$$

3. Hybrid qubit-optomechanical model

Recently, it has been proposed to couple a two-level atom to the standard optomechanical model [58–60]; such a hybrid model is described by the Hamiltonian,

$$\begin{aligned} \hat{H}_h = & \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \\ & + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \lambda (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+), \end{aligned} \quad (29)$$

where the two-level system is described by Pauli matrices, $\hat{\sigma}_j$ with $j = z, \pm$, and the transition frequency ω_0 , and the atom-field coupling is given by the parameter λ . Here, we will first move into the frame defined by the photon number and the qubit energy rotating at the cavity field frequency, $\hat{U}_r = e^{-i\omega_c(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_z/2)t}$, such that the effective Hamiltonian is,

$$\begin{aligned} \hat{H}_r = & \frac{\delta}{2} \hat{\sigma}_z + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+) \\ & - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \end{aligned} \quad (30)$$

where the detuning between the qubit and cavity field frequency is given by $\delta = \omega_0 - \omega_c$. We can follow a right unitary approach [61–63] and rewrite this Hamiltonian in the form,

$$\hat{H}_r = \hat{T} \hat{H}_T \hat{T}^\dagger, \quad (31)$$

where the auxiliary Hamiltonian is given by the expression,

$$\begin{aligned} \hat{H}_T = & \frac{\delta}{2} \hat{\sigma}_z + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\sigma}_x \\ & - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + g (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) |e\rangle\langle e|, \end{aligned} \quad (32)$$

where we have diagonalized the cavity field part by using the operators,

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{V} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}^\dagger = \begin{pmatrix} \hat{V}^\dagger & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

They are right unitary due to the properties of the Susskind–Glogower operators,

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}} \hat{a}, \quad \hat{V}^\dagger = \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}}, \quad (34)$$

that fulfill $\hat{V} \hat{V}^\dagger = 1$, but $\hat{V}^\dagger \hat{V} = 1 - |0\rangle\langle 0|$. Note that we can

rearrange the following terms in the auxiliary Hamiltonian,

$$\begin{aligned} & g (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) |e\rangle\langle e| - g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \\ & = \frac{1}{2} g (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \hat{\sigma}_z - g \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \end{aligned} \quad (35)$$

and use again the displacement operator in terms of the number of photons in the field to obtain,

$$\begin{aligned} \hat{H}_d = & \hat{D}^\dagger \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \hat{H}_T \hat{D} \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right], \\ = & \left[\frac{\delta}{2} + \frac{g}{2} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \frac{g^2}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \hat{\sigma}_z + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ & + \lambda \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\sigma}_x - \frac{g^2}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Now, just for the sake of clarity, we can introduce a rotation around $\hat{\sigma}_y$,

$$\hat{R}_y(\theta) = e^{-i\theta \hat{\sigma}_y}, \quad (37)$$

and rewrite our initial hybrid optomechanical Hamiltonian as,

$$\begin{aligned} \hat{H}_r = & \hat{T} \hat{D}_b \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \hat{R}_y^\dagger \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ & \times \hat{H}_a \hat{R}_y \left(\frac{\pi}{4} \right) \hat{D}_b^\dagger \left[\frac{g}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \hat{T}^\dagger, \end{aligned} \quad (38)$$

with the final auxiliary Hamiltonian given by,

$$\hat{H}_a = \hat{H}_K + \hat{H}_{am}. \quad (39)$$

Note that the effective Kerr medium,

$$\hat{H}_K = -\frac{g^2}{\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right)^2, \quad (40)$$

commutes with the rest of the terms,

$$\hat{H}_{am} = \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_z + \tilde{\Omega}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_x + \frac{g}{2} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \hat{\sigma}_x, \quad (41)$$

which can be reinterpreted as a driven two-level atom interacting with the mechanical oscillator under the Jaynes–Cummings model [64] without the RWA. The two-level transition frequency and driving strength depend on the intensity of the optical mode,

$$\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) = -\lambda \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}}, \quad (42)$$

$$\tilde{\Omega}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) = \frac{\delta}{2} + \frac{g^2}{2\omega_m} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right). \quad (43)$$

At this point we could note that,

$$\begin{aligned}\hat{H}_r^2 &= \hat{T}\hat{H}_T^2\hat{T}^\dagger - \hat{T}\hat{H}_T\left(|e\rangle\langle e| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes \sum_{k=0}^{\infty}|k\rangle\langle k|\right)\hat{H}_T\hat{T}^\dagger, \\ &= \hat{T}\hat{H}_T^2\hat{T}^\dagger - \left[\frac{\delta}{2} + \omega_m k + g(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)\right] \\ &\quad \times \left(|e\rangle\langle e| \otimes \hat{V}|0\rangle\langle 0| \hat{V}^\dagger \otimes \sum_{k=0}^{\infty}|k\rangle\langle k|\right) \\ &\quad \times \left[\frac{\delta}{2} + \omega_m k + g(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)\right], \\ &= \hat{T}\hat{H}_T^2\hat{T}^\dagger,\end{aligned}\quad (44)$$

and write the evolution operator of the total system as,

$$\begin{aligned}\hat{U}(t) &= \hat{T}\hat{D}_b^\dagger\left[\frac{g}{\omega_m}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2}\right)\right]\hat{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{-i\hat{H}_a t}\hat{R}_y^\dagger \\ &\quad \times \left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{D}_b^\dagger\left[\frac{g}{\omega_m}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2}\right)\right]\hat{T}^\dagger,\end{aligned}\quad (45)$$

where we can use the fact that the Kerr term commutes,

$$e^{-i\hat{H}_a t} = e^{-i\hat{H}_K t}e^{-i\hat{H}_a t},\quad (46)$$

but in the end, it is not possible to provide a closed form propagator from the term $e^{-i\hat{H}_a t}$. Working a formal rotating wave approximation in this scenario is beyond our current purpose.

4. Conclusion

We used a purely algebraic approach to revisit the standard quantum optomechanical model describing the linear dispersive interaction between two bosonic modes, electromagnetic and mechanical. We showed that a displacement on the mechanical basis proportional to the number state in the electromagnetic basis, sometimes called a polaron transformation, delivers a model consisting of an effective electromagnetic Kerr medium plus a coupling between the electromagnetic and mechanical modes similar to that found in a trapped ion. We took advantage of ion-trap QED and showed that it is possible to implement a series of optical-mechanical couplings that allow trapping, cooling, and parametric coupling phenomena by choosing detunings between the electromagnetic mode and the classical pump that are integer multiples of the mechanical frequency.

We also used superoperator techniques to revisit the standard optomechanical system when the mechanical oscillator is coupled to the environment. Here we worked out a general expression and gave a closed-form time evolution superoperator for the particular case of a thermal electromagnetic field.

Finally, we presented a right unitary approach to a system formed by the addition of a two-level atom interacting with the electromagnetic mode. This approach makes it simple to realize that the electromagnetic mode enables the coupling

between the two-level system with the mechanical mode in a Jaynes–Cummings without the RWA form but also shows us that it is not possible to provide a closed-form time evolution operator unless an adequate approximation scheme is developed.

Acknowledgments

C Ventura Velázquez acknowledges financial support from CONACyT through the master degree scholarship #294810.

References

- [1] Poynting J H 1909 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **82** 560–67
- [2] Poynting J H 1910 *The Pressure of Light* (London: E. S. Gorham)
- [3] Lebedev P N 1901 *Ann. Phys. (Leipzig)* **6** 433–58
- [4] Nichols E F and Hull G F 1901 *Phys. Rev.* **12** 307–20
- [5] Lebedev P 1910 *Ann. Phys.* **32** 411–37
- [6] Letokhov V S 1968 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **7** 348–51
- [7] Ashkin A 1970 *Phys. Rev. Lett.* **24** 156–59
- [8] Dalibard J, Reynaud S and Cohen-Tannoudji C 1984 *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **17** 4577–94
- [9] Braginskii V B and Manukin A B 1967 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **52** 986–89
- [10] Dorsel A, McCullen J D, Meystre P, Vignes E and Walther H 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 1550–53
- [11] Gozzini A, Maccarrone F, Mango I and Barbarino S 1985 *J. Opt. Soc. Am. B* **2** 1841–45
- [12] Braginskii V B 1967 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **53** 1434–41
- [13] Braginskii V B and Nazarenko V S 1969 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **57** 1421–14
- [14] Caves C M 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 75–79
- [15] Jacobs K, Tombesi P, Collett M J and Walls D F 1994 *Phys. Rev. A* **49** 1961–66
- [16] Law C K 1995 *Phys. Rev.* **51** 2537–42
- [17] Caves C M 1981 *Phys. Rev. D* **23** 1693–708
- [18] Pace A F, Collett M J and Walls D F 1993 *Phys. Rev. A* **47** 3173–89
- [19] Mancini S and Tombesi P 1994 *Phys. Rev. A* **49** 4055–65
- [20] Khalili F, Danilishin S, Miao H, Müller-Ebhardt H, Yang H and Chen Y 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 070403
- [21] Leggett A J 1980 *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **69** 80–100
- [22] Bose S, Jacobs K and Knight P L 1999 *Phys. Rev. A* **59** 3204–10
- [23] Poot M and van der Zant H S J 2012 *Phys. Rep.* **511** 273–335
- [24] Kippenberg T J and Vahala K J 2008 *Science* **321** 1172–76
- [25] Marquardt F and Girvin S M 2009 *Physics* **2** 40
- [26] Moore G T 1970 *J. Math. Phys.* **11** 2679–91
- [27] Meystre P, Wright E M, McCullen J D and Vignes E 1985 *J. Opt. Soc. Am. B* **2** 1830–40
- [28] Marburger J H and Felber F S 1978 *Phys. Rev. A* **17** 335–42
- [29] Hilico L, Courty J M, Fabre C, Giacobino E, Abram I and Oudar J L 1992 *Appl. Phys. B* **55** 202–09
- [30] Jackel M T and Reynaud S 1992 *Quantum Opt.* **4** 39–53
- [31] Rodríguez-Lara B M and Moya-Cessa H 2004 Optical bistability in a cavity with one moving mirror *Proc. 8th Int. Conf. on Squeezed States and Uncertainty Relations* pp 354–59
- [32] Aldana A, Bruder C and Nunnenkamp A 2013 *Phys. Rev. A* **88** 043826
- [33] Bose S, Jacobs K and Knight P L 1997 *Phys. Rev. A* **56** 4175–86

- [34] Ludwig M, Safavi-Naeini A H, Painter O and Marquardt F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 063601
- [35] Rodríguez-Lara B M and Moya-Cessa H 2004 *Rev. Mex. Fis.* **50** 213–15
- [36] Safavi-Naeini A H, Gröblacher S, Hill J T, Chan J, Aspelmeyer M and Painter O 2013 *Nature* **500** 185–89
- [37] Rabl P 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 063601
- [38] Tang H X and Vitali D 2014 *Phys. Rev. A* **89** 063821
- [39] Moya-Cessa H, Soto-Eguibar F, Vargas-Martínez J M, Juárez-Amaro R and Zúñiga-Segundo A 2012 *Phys. Rep.* **513** 229–61
- [40] Mancini S, Giovannetti V, Vitali D and Tombesi P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 120401
- [41] Bhattacharya M, Giscard P L and Meystre P 2008 *Phys. Rev. A* **77** 030303
- [42] Marshall W, Simon C, Penrose R and Bouwmeester D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 130401
- [43] Hong T, Yang H, Miao H and Chen Y 2013 *Phys. Rev. A* **88** 023812
- [44] Akram U, Bowen W P and Milburn G J 2013 *New J. Phys.* **15** 093007
- [45] Xu G F and Law C K 2013 *Phys. Rev. A* **87** 053849
- [46] Xu X W, Wang H, Zhang J and Liu Y X 2013 *Phys. Rev. A* **88** 063819
- [47] Bhattacharya M and Meystre P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 073601
- [48] Marquardt F, Chen J P, Clerk A A and Girvin S M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 093902
- [49] Wilson-Rae I, Nooshi N, Zwerger W and Kippenberg T J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 093901
- [50] Mancini S, Man'ko V I and Tombesi P 1997 *Phys. Rev. A* **55** 3042–50
- [51] Gu W J, Li G X and Yang Y P 2013 *Phys. Rev. A* **88** 013835
- [52] Kronwald A and Marquardt F 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 133601
- [53] Gu W J, Li G X, Wu S P and Yang Y P 2014 *Opt. Express* **22** 18254–67
- [54] Phoenix S J D 1990 *Phys. Rev. A* **41** 5132–38
- [55] Arévalo-Aguilar L M and Moya-Cessa H M 1996 *Rev. Mex. Fis.* **42** 675–83
- [56] Arévalo-Aguilar L M and Moya-Cessa H M 1998 *Quantum Semiclass. Opt.* **10** 671–74
- [57] Lu H X, Yang J, Zhang Y D and Chen Z B 2003 *Phys. Rev. A* **67** 024101
- [58] Ian H, Gong Z R, Liu Y X, Sun C P and Nori F 2008 *Phys. Rev. A* **78** 013824
- [59] Genes C, Vitali D and Tombesi P 2008 *Phys. Rev. A* **77** 050307
- [60] Pflanzner A C, Romero-Isart O and Cirac J I 2013 *Phys. Rev. A* **88** 033804
- [61] Tang Z 1996 *Phys. Rev. A* **54** 154–73
- [62] Rodríguez-Lara B M, Rodríguez-Méndez D and Moya-Cessa H 2011 *Phys. Lett. A* **375** 3770–74
- [63] Rodríguez-Lara B M and Moya-Cessa H M 2013 *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 095301
- [64] Jaynes E T and Cummings F W 1963 *Proc. IEEE* **51** 89–109

Bibliografía

- [1] J. H. Poynting, *The Pressure of Light. The Romance of Science*, New York: E. S. Gorham, 1910.
- [2] P. Meystre and S. Stenholm, “Introduction to feature on the mechanical effects of light,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 2, pp. 1706–1706, Nov 1985.
- [3] J. C. Maxwell, “A dynamical theory of the electromagnetic field,” *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, vol. 155, pp. 459–512, January 1865.
- [4] J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, vol. 1. Oxford: Clarendon Press, 1873.
- [5] J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, vol. 2. Oxford: Clarendon Press, 1873.
- [6] M. H. Shamos, ed., *Great experiments in physics, Firsthand accounts from Galileo to Einstein*. New York: Dover Publications, 1987.
- [7] P. N. Lebedev, “Experimental examination of light pressure,” *Ann. der Physik*, vol. 311, no. 11, pp. 433–458, 1901.
- [8] E. F. Nichols and G. F. Hull, “A preliminary communication on the pressure of heat and light radiation,” *Phys. Rev. (Series I)*, vol. 13, no. 5, pp. 307–320, 1901.
- [9] E. F. Nichols and G. F. Hull, “The pressure due to radiation (second paper),” *Phys. Rev. (Series I)*, vol. 13, no. 5, pp. 26–50, 1903.
- [10] M. Planck, “On the law of the energy distribution in the normal spectrum,” *Ann. der Physik*, vol. 4, pp. 553–563, 1901.
- [11] A. Einstein, “Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtet betreffenden heuristischen gesichtspunk (on a heuristic viewpoint concerning the generation and transformation of light),” *Ann. der Physik*, vol. 17, pp. 132–148, March 1905.
- [12] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the emission and absorption of radiation,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 114, pp. 243–265, March 1 1927.
- [13] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 4th ed., 1958.
- [14] L. Mandel and E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1st ed., 1995.
- [15] W. E. Lamb and R. C. Retherford, “Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method,” *Phys. Rev.*, vol. 72, pp. 241–243, Aug 1947.

-
- [16] J. P. Gordon, H. J. Zeiger, and C. H. Townes, “Molecular microwave oscillator and new hyperfine structure in the microwave spectrum of nh_3 ,” *Phys. Rev.*, vol. 95, pp. 282–284, Jul 1954.
- [17] A. L. Schawlow and C. H. Townes, “Infrared and optical masers,” *Phys. Rev.*, vol. 112, pp. 1940–1949, Dec 1958.
- [18] T. Maiman, “Stimulated optical radiation in ruby,” *Nature (London)*, vol. 187, p. 493, 1960.
- [19] V. B. Braginskii and A. B. Manukin, “Ponderomotive effects of electromagnetic radiation,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 25, no. 4, pp. 653–655, 1967.
- [20] V. B. Braginskii and V. S. Nazarenko, “Quantum properties of a macroscopic oscillator,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 30, no. 4, pp. 770–771, 1970.
- [21] V. B. Braginskii, A. B. Manukin, and M. Y. Tikhonov, “Investigation of dissipative ponderomotive effects of electromagnetic radiation,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 31, no. 5, pp. 829–830, 1970.
- [22] A. Ashkin, “Acceleration and trapping of particles by radiation pressure,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 24, no. 4, pp. 156–159, 1970.
- [23] A. Ashkin and J. M. Dziedzic, “Optical levitation by radiation pressure,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 19, no. 8, pp. 283–385, 1971.
- [24] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and S. Chu, “Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles,” *Opt. Lett.*, vol. 11, no. 5, pp. 288–290, 1986.
- [25] T. W. Hänsch and A. L. Schawlow, “Cooling of gases by laser radiation,” *Optics Communications*, vol. 13, no. 1, pp. 68–69, 1975.
- [26] V. S. Letokhov and V. G. Minogin, “Cooling and trapping of atoms and molecules by a resonant laser field,” *Opt. Commun.*, 1976.
- [27] A. Dorsel, J. D. McCullen, P. Meystre, E. Vignes, and H. Walther, “Optical bistability and mirror confinement induced by radiation pressure,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 51, no. 17, pp. 1550–1553, 1983.
- [28] P. Meystre, J. D. McCullen, E. Vignes, and E. M. Wright, “Theory of radiation-pressure-driven interferometers,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 2, pp. 1830–1840, Nov 1985.
- [29] C. M. Caves, “Quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations in an interferometer,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, no. 2, pp. 75–79, 1980.
- [30] C. M. Caves, “Quantum-mechanical noise in an interferometer,” *Phys. Rev. D*, vol. 23, pp. 1693–1708, Apr 1981.
- [31] A. F. Pace, M. J. Collett, and D. F. Walls, “Quantum limits in interferometric detection of gravitational radiation,” *Phys. Rev. A*, vol. 47, no. 4, pp. 3173–3189, 1993.

- [32] C. K. Law, “Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A hamiltonian formulation,” *Phys. Rev. A*, vol. 51, no. 3, pp. 2537–2541, 1995.
- [33] I. Wilson-Rae, N. Nooshi, W. Zwerger, and T. J. Kippenberg, “Theory of ground state cooling of a mechanical oscillator using dynamical backaction,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 093901, Aug 2007.
- [34] M. Aspelmeyer, P. Meystre, and K. Schwab, “Quantum optomechanics,” *Phys. Today*, vol. 65, pp. 29–35, 2012.
- [35] R. Penrose, *The road to reality: a complete guide to the laws of the universe*. U.S.A.: Alfred A. Knoff, 1st ed., 2005.
- [36] H. Moya-Cessa, F. Soto-Eguibar, J. M. Vargas-Martínez, R. Juárez-Amaro, and A. Z. . niga Segundo, “Ion-laser interactions: The most complete solution,” *Physics Reports*, vol. 513, no. 5, pp. 229 – 261, 2012.
- [37] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. U.S.A.: Elsevier Academic Press, 6th ed., 2005.
- [38] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, and F. Marquardt, “Cavity optomechanics,” *arXiv:1303.0733v1*, 2013.
- [39] T. A. Palomaki, J. D. Teufel, R. W. Simmonds, and K. W. Lehnert, “Entangling mechanical motion with microwave fields,” *Science*, vol. 342, pp. 710–713, November 2013.
- [40] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*. Berlin: Springer, 2008.
- [41] J. Zhang, K. Peng, and S. L. Braunstein, “Quantum-state transfer from light to macroscopic oscillators,” *Phys. Rev. A*, vol. 68, p. 013808, 2003.
- [42] H. Ian, Z. R. Gong, Y.-x. Liu, C. P. Sun, and F. Nori, “Cavity optomechanical coupling assisted by an atomic gas,” *Phys. Rev. A*, vol. 78, p. 013824, Jul 2008.
- [43] C. Genes, D. Vitali, and P. Tombesi, “Emergence of atom-light-mirror entanglement inside an optical cavity,” *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 050307, May 2008.
- [44] A. C. Pflanter, O. Romero-Isart, and J. I. Cirac, “Optomechanics assisted by a qubit: From dissipative state preparation to many-partite systems,” *Phys. Rev. A*, vol. 88, p. 033804, Sep 2013.
- [45] J. Restrepo, C. Ciuti, and I. Favero, “Single-polariton optomechanics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 112, p. 013601, 2014.
- [46] E. Jaynes and F. Cummings, “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, pp. 89–109, Jan 1963.