



INAOE

**Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica.**

**Análisis de bifurcaciones ópticas utilizando la
ecuación de Burgers**

Por Lic. Giovanni Arenas Muñoz

**Tesis sometida como requisito parcial para obtener
el grado de:**

Maestro en Ciencias en la especialidad en Óptica

En el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y
Electrónica**

Asesor de Tesis:

Dr. Gabriel Martínez Nikonoff

Agosto 2017

Tonantzintla, Puebla, México

INAOE 2017

©INAOE 2017

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes mencionando la fuente.



Dedicatoria

*Este trabajo de tesis es dedicado mi madre la señora Maria Eugenia Muñoz
Rosas por su apoyo y comprensión, ya que sin ella no lo hubiera logrado.*

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Gabriel Martínez Niconoff por su apoyo en la elaboración de este trabajo, ya que sin él, esto no se hubiera realizado.

A la señora María Eugenia Muñoz Rosas por su apoyo moral y comprensión.

Por último a Conacyt por la beca otorgada y al INAOE por darme la oportunidad de ingresar a su posgrado.

Índice general

1. Introducción.	1
1.1. Descripción del trabajo.	3
2. Conceptos Fundamentales de Óptica.	5
2.1. Modelo de Huygens-Fresnel.	5
2.2. Modelo de Espectro Angular.	7
2.3. Ecuación de Euler-Lagrange.	9
2.4. Condición de transversalidad y descripción del frente de onda. .	12
3. Conceptos de Geometría Diferencial.	19
3.1. Región de rango cero.	21
3.2. Región de rango uno.	22
3.3. Región de rango dos.	30
3.4. Primera Forma Fundamental.	32
3.5. Segunda Forma fundamental (Teorema de Meusnier).	35
4. Descripción de la ecuación de Burgers.	45
4.1. Las EDP de primer orden.	46
4.2. Ecuación de Burgers.	54
4.3. Análisis de la ecuación de Burgers.	55
4.4. Existencia de una solución genuina.	57
4.5. Leyes de conservación y condición de salto.	59

4.6. Consideración de estabilidad, condición de entropía y choques.	63
5. Análisis de Curvas con Puntos de Inflexión.	69
5.1. Geometrización de un campo óptico difractado por una curva rendija.	69
5.2. Sistema a analizar.	71
5.3. Desdoblamientos de campos ópticos.	74
5.4. Análisis de campos ópticos con una ecuación tipo Burgers. . .	77
6. Conclusiones.	81
Apéndice A	83
A. Análisis de la ecuación 2.41	83
B. Bibliografía	87

Índice de figuras

1.1. Mapeo o transformación $\Phi : R^2 \rightarrow R$	2
2.1. (a) Frente de onda propagándose. (b) Aplanamiento de ondas esféricas.	6
2.2. Esfera frecuencial con $r = \sqrt{\frac{k^2 - \beta^2}{4\pi^2}}$	9
2.3. (a) Curva $y = y(x)$. (b) Curva $y = y(x, \alpha)$	10
2.4. Familia de extremales.	12
2.5. (a) Variación de una extremal a otra. (b) Geometría de la extremal.	14
3.1. Frente de onda a través de una lente.	20
3.2. (a) Superficie S . (b) Estiramiento de la superficie S	20
3.3. (a) Centro de masa de un sistema de partículas. (b) Desdobra- miento de un punto umbilico.	21
3.4. Línea recta en 3D.	23
3.5. Curva en R^3	24
3.6. Vector tangente a la curva.	26
3.7. (a) Sistema de referencia local móvil. (b) Proyecciones de la curva en sus respectivos planos.	28
3.8. Representación geométrica.	29
3.9. Φ <i>tuerce</i> y <i>dobra</i> a D sobre la superficie $S = \Phi(D)$	31
3.10. Líneas rectas en $D \subset R^2$ generan curvas en R^3	32

3.11. (a) Ángulo entre curvas. (b) Representación geométrica de $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$	35
3.12. (a) Descomposición del vector \vec{k} . (b).	36
3.13. (a) Sección Normal. (b) Representación geométrica del teorema de Meusnier.	38
3.14. Direcciones asintóticas.	40
4.1. (a) Campo vectorial \vec{F} arbitrario. (b) Caracterización de una línea del campo \vec{F} . (c) Condición de paralelismo.	47
4.2. (a) Puntos comunes entre la superficie y las líneas vectoriales. (b) Caracterización de la superficie $z = f(x, y)$	48
4.3. Proyección de Γ sobre el plano.	54
4.4. Deformación del pulso conforme t se incrementa.	56
4.5. Representación del choque por la línea recta.	57
4.6. Curvas características de la función $u = u(x, t)$	64
4.7. (a) Zona separatriz. (b) Las condiciones en la frontera para los vectores de campo en la zona interfacial entre dos medios puede obtenerse aplicando la ley de Gauss a S e integrando $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ a lo largo de la trayectoria $ABCD A$	67
5.1. Iluminación de una curva rendija.	70
5.2. Condición de Frontera.	70
5.3. (a) Condición de frontera. (b) Generalización de (a).	73
5.4. Desdoblamiento de un punto umbilico.	74
5.5. (a) Punto umbilico. (b) Desdoblamiento del punto umbilico y (c) Zonas donde se organiza el campo.	76
5.6. (a) Bifurcación del campo (b) Zonas donde se organiza el campo.	77
5.7. Franjas de interferencia asociadas a las leyes de conservación.	79
A.1. (a) Curva adiabática. (b) Conexión de dos isotermas a través de una adiabática.	84

Resumen.

El estudio se propone a través de transmitancias que contienen puntos de inflexión cuyo campo difractado evoluciona generando regiones en donde la función de curvatura cambia de signo, estas regiones se conocen como zonas umbilicas o focales.

Las propiedades físicas del campo óptico en la vecindad focal presentan comportamientos que se modelan con la ecuación diferencial de Burgers, esta permite describir la estructura topológica del campo mediante leyes de conservación. Se muestran resultados experimentales de la generación de superficies umbilicas.

CAPÍTULO 1

Introducción.

Una actividad fundamental del desarrollo científico consiste en entender y explicar el entorno que lo rodea por medio de observaciones y mediciones las cuales se sintetizan en un modelo, de tal forma que este puede predecir el comportamiento del entorno. Una cualidad del modelo es que este debe poseer un lenguaje matemático, físico, químico, biológico, etc., que implica incorporar la evolución espacio-temporal del sistema surgiendo de manera natural el concepto de ecuación diferencial.

Utilizando como prototipo una ecuación diferencial de segundo orden, podemos mencionar que existe una gran variedad de métodos que nos permiten encontrar la solución analítica explícita, ejemplo de esto son las ecuaciones diferenciales de tipo (Legendre, Laguerre, Bessel, Hermite, etc.), que se conocen como funciones especiales. Sin embargo existe un gran número de ecuaciones diferenciales cuya solución no tiene una estructura analítica definida, afortunadamente existe un análisis alternativo conocido como sistemas dinámicos el cual fue propuesto por el matemático francés H. Poincaré. En esta línea de análisis se introdujo el concepto de atractor-repulsor y logro determinar las propiedades cualitativas de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los ingredientes en esta formulación involucran tres conceptos: *estabilidad estructural*, *estabilidad dinámica y conjunto crítico*. Entre sus contemporáneos estaba A. M. Lyapunov quien retomó la idea de Poincaré (estudio de soluciones críticas), y también trabajó en teoría de bi-

furcación, no fue hasta 1930 que los matemáticos A. A. Andronov y L. S. Pontryagin desarrollaron el concepto de estabilidad estructural, esto dio paso a la construcción de la teoría topológica de sistemas dinámicos por S. Smale en 1967. Por otra parte también florecieron otras líneas matemáticas, por ejemplo M. Morse había establecido formas de estructura canónicas para funciones cercanas a puntos singulares aisladas y H. Whitney describió mapeos en puntos singulares. A mediados del siglo pasado, R. Thom introdujo el concepto de transversalidad como mecanismo para discutir la estabilidad estructural y usarlas para describir las formas canónicas en ciertas singularidades de mapeos $\Phi : R^n \rightarrow R$ (caso particular $\Phi : R^2 \rightarrow R$. Ver Fig.(1.1)), las cuales son llamadas funciones de catástrofes. La teoría de catástrofes intenta estudiar la naturaleza cualitativa de las soluciones de ecuaciones que dependen de los parámetros que aparecen en ellas y también describe la geometría focal, pero no determina las propiedades físicas.[1-5]

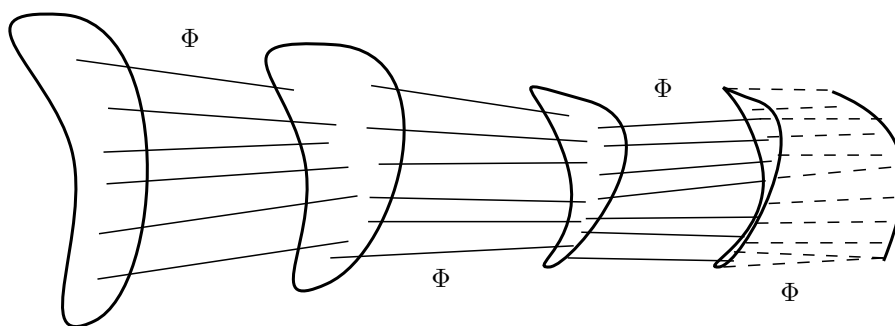


Figura 1.1: Mapeo o transformación $\Phi : R^2 \rightarrow R$.

Otro ejemplo de particular interés ocurre cuando iluminamos algún objeto y este produce una redistribución de campo óptico el cual se conoce como campo difractado. La evolución de este campo puede generar regiones con alto contenido energético las cuales se conocen como zonas focales. El objetivo del presente trabajo de tesis consiste en describir el análisis estructural del campo óptico en la vecindad de regiones focales y analizar sus propiedades topológicas, en particular se estudia la transición de comportamientos hiperbólicos a parabólicos los cuales desde el punto de vista físico corresponden a transiciones *onda-difusión* y viceversa.

El estudio se propone a través de transmitancias que contienen puntos de

inflexión cuyo campo difractado evoluciona generando regiones en donde la función de curvatura cambia de signo, estas regiones se conocen como zonas umbilicas.

Las propiedades físicas del campo óptico en la vecindad focal presenta comportamientos que se modelan con la *ecuación diferencial de Burgers*, esta permite describir propiedades genéricas a través de procesos de entropía. Además se muestran resultados experimentales de la generación de superficies umbilicas.

1.1. Descripción del trabajo.

Para cumplir con el objetivo propuesto el desarrollo de tesis es el siguiente.

En el capítulo *II* se establecen los conceptos fundamentales de difracción en particular se estudian los modelos de *Huygens-Fresnel* y *Rayleigh-Debye-Sommerfeld* también conocido como *espectro angular*. Asociando una relación funcional en la función de fase, se identifican las características que permiten sintetizar una región focal, estas propiedades están contenidas en un comportamiento extremal, en particular se deducen brevemente las ecuaciones de *Euler-Lagrange* y la condición de transversalidad, esta última corresponde a la definición matemática de un frente de onda y permite una interpretación geométrica para la síntesis de región focal.[6-8]

Una parte fundamental del trabajo consiste en el estudio de la evolución espacial de la región focal la cual se modela utilizando el formalismo de geometría diferencial que se describe en el capítulo *III* y esta nos permite visualizar nuevos efectos del campo óptico, es decir, con ayuda de la geometría diferencial podemos modelar nuestra condición frontera como una curva en términos de su curvatura y a través de ella podemos clasificar las regiones focales.[9-13]

Las regiones focales se describen mediante el método de *características* y esta línea de pensamiento permite describir la transición de campos *ondulatorios* (ecuación de onda) a *difusivos* (ecuación de difusión), por esta razón se propone que el campo óptico satisface la ecuación de Burgers, la cual presenta propiedades no lineales y como consecuencia aparecen efectos de bifurcaciones, morfogenesis, entropía, etc., algunas de ellas se discuten en el capítulo *IV*. [14-16]

En el capítulo *V* se describe el campo óptico de una estructura difractante con un perfil geométrico de tipo cubico con propiedades tipo placa zonal,

en la literatura una placa zonal es un objeto casi-periódico que permite la síntesis de regiones focales. Se propone una transmitancia con propiedades locales tipo placa zonal y que tiene asociado un punto de inflexión el cual es la estructura germen para sintetizar una región umbilica. Además se establecerá un paralelismo entre las leyes de conservación asociadas a la ecuación de Burgers con la estructura de franjas del campo difractado.

En el capítulo *VI* se muestran las conclusiones generales del trabajo.

CAPÍTULO 2

Conceptos Fundamentales de Óptica.

En este capítulo se realiza la descripción de los modelos de difracción en términos de ondas esféricas (*Principio de Huygens-Fresnel*) y ondas planas (*Rayleigh-Debye-Sommerfeld* o también conocido como *espectro angular*) con el fin de incorporar un análisis extremal por medio del calculo variacional ya que podemos describir y geometrizar el campo óptico como una familia de extremales a través de una curva. Seleccionando subconjuntos de la familia de extremales podemos predecir la ecuación diferencial que describe la geometría focal.

2.1. Modelo de Huygens-Fresnel.

Existe una gran cantidad de procesos ópticos que se modelan a través del análisis de *difracción* el cual **es el estudio del campo óptico que se genera al iluminar un objeto y como consecuencia el espacio se perturba**, este se describe mediante la superposición de ondas, este hecho nos lleva a enunciar un principio muy importante en óptica.

Principio de Huygens.- Básicamente explica que todos los puntos de un frente de onda esférico pueden ser considerados como emisor de fuentes secundarias y estas se combinan para producir un nuevo frente de onda en la dirección de propagación, de esta forma la difracción es causada por la

propagación de estas ondas secundarias en una región de sombra. El campo de una onda difractada en una región de sombra es una suma de vectores cuyas componentes son asociadas a los campos eléctricos de todas las ondas secundarias en el espacio alrededor del objeto iluminado.

Como era de espera tal principio está incompleto, ya que no describe el efecto de difracción, es por eso que más tarde Fresnel retomaría la idea de Huygens y lo sintetiza de tal forma que.

Principio de Huygens-Fresnel.- Establece que cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en un instante de tiempo dado, sirve como una fuente de ondas secundarias esféricas (con la misma frecuencia de la onda primaria). La amplitud del campo óptico en cualquier punto adelante es la superposición de todas estas ondas considerando sus amplitudes y fases relativas.

Supongamos que conocemos la forma del frente de onda inicial AB . Sobre el frente situamos varias fuentes de ondas secundarias señaladas por puntos. Sea v la velocidad de propagación en el punto donde está situada la fuente secundaria de ondas. Para determinar la forma del frente de onda $A'B'$ en el instante t , se traza una circunferencia de radio vt , centrada en cada una de las fuentes (puntos). La envolvente de todas las circunferencias es el nuevo frente de ondas en el instante t . (Ver Fig.(2.1)(a))

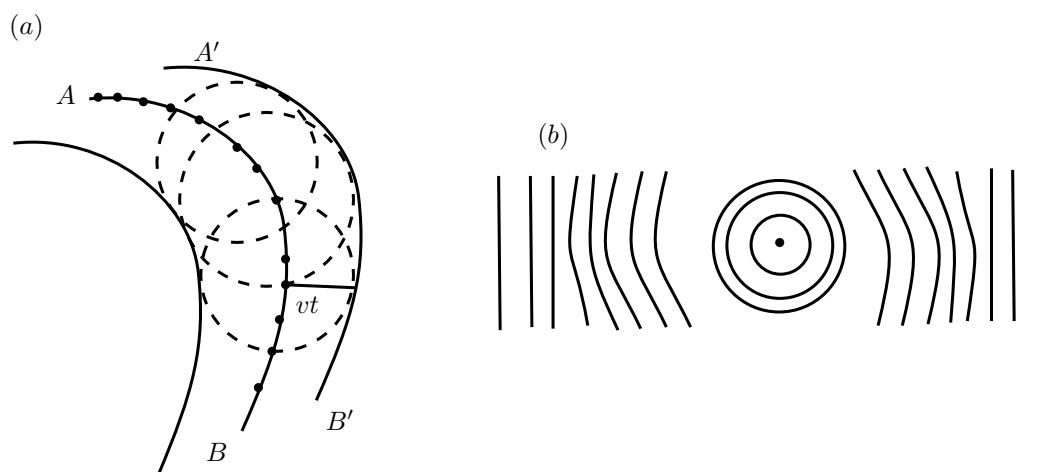


Figura 2.1: (a) Frente de onda propagándose. (b) Aplanamiento de ondas esféricas.

Se sabe que una *onda esférica* es representada por

$$\psi(r, t) = \frac{\mathcal{A}}{r} \cos k(r \pm vt), \quad (2.1)$$

o

$$\psi(r, t) = \frac{\mathcal{A}}{r} e^{ik(r \pm vt)}, \quad (2.2)$$

donde la constante \mathcal{A} se denomina como la intensidad de la fuente. Para cualquier valor fijo del tiempo, esta representa una agrupación de esferas concéntricas que llenan todo el espacio. Cada frente de onda o superficie de fase constante está dada por $\vec{k} \cdot \vec{r} = cte$.

Obsérvese que la amplitud de cualquier onda esférica es una función de r , donde el término r^{-1} sirve como factor de atenuación. Contrariamente a la onda plana, una onda esférica disminuye en amplitud, cambiando por lo tanto su perfil al expandirse y alejarse del origen.

Cuando un frente de onda esférico se propaga hacia afuera, su radio aumenta. A una distancia suficiente de la fuente, una pequeña área del frente de onda se parecerá mucho a una porción de una onda plana. (Ver Fig.(2.1)(b)).

2.2. Modelo de Espectro Angular.

Para poder decir algo a cerca del modelo de espectro angular, surge la necesidad de describir el campo óptico como la distribución de amplitudes, cuya solución debe satisfacer la ecuación de onda

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (2.3)$$

en donde Φ , es la amplitud del campo dependiente de las coordenadas (x, y, z, t) y corresponde a una componente del campo eléctrico, t es el tiempo y c es la velocidad de la luz en el vacío. La solución clásica consiste en separar las componentes espaciales de la temporal, para la cual se propone una solución de la forma

$$\Phi(x, y, z) = \phi(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad (2.4)$$

sustituyendo la ec.(2.4) en ec.(2.3) se obtiene la tan famosa *ecuación de Helmholtz* o *ecuación reducida de onda* la cual sólo depende de las coordenadas espaciales, es decir se ha eliminado la parte temporal

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) + k^2 \phi(x, y, z) = 0, \quad (2.5)$$

donde \vec{k} es el vector de dirección de la onda y su modulo $k^2 = \frac{2\pi}{\lambda}n$, con n el índice de refracción del medio, λ es la longitud de onda de la luz en el vacío. Para el caso en que n es constante la ec.(2.5) es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden. La solución elemental a la ecuación de Helmholtz está dada por una onda plana cuya representación es

$$\phi(x, y, z) = Ae^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)} = Ae^{i2\pi(xu + yv + zp)}, \quad (2.6)$$

en donde α , β y γ son los ángulos directores de \vec{k} .

Definición.- *Un modo es una solución exacta a la ecuación de Helmholtz que tiene una función de fase en la coordenada de propagación de naturaleza armónica y que su perfil satisface una ecuación de eigenvalores*

$$\nabla^2 \perp f(x, y) + (k^2 - \beta^2)f(x, y) = 0. \quad (2.7)$$

La ec.(2.7) es análoga a una ecuación tipo Helmholtz, con $\phi(x, y, z) = f(x, y)e^{i\beta z}$, donde β es un parámetro de fase el cual se puede interpretar como un nuevo número de onda. Representada en términos de una longitud de onda equivalente i.e. $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{eq}}$, por último la función $f(x, y)$ describe el perfil de la onda.

Para continuar con el desarrollo anteriormente mostrado, el siguiente paso consiste en identificar una aplicación particularmente importante para describir el campo de difracción, el cual se conoce como modelo del espectro angular. El estudio está basado en el hecho de que las ondas planas ec.(2.6) satisfacen la representación modal, en donde los parámetros de estructura cumplen con

$$u^2 + v^2 + p^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (2.8)$$

si u , v y p son reales la ecuación anterior representa una esfera en el espacio frecuencial (Fig.(2.2)). Por lo tanto, tenemos que el campo de difracción tiene la representación modal

$$\phi(x, y, z) = \int \int A(u, v)e^{i2\pi(xu + yv + zp)} dudv. \quad (2.9)$$

La condición de frontera caracterizada por el objeto difractante la cual se conoce como función de transmitancia está dada por

$$\phi(x, y, z = 0) = t(x, y) = \int \int A(u, v)e^{i2\pi(xu + yv)} dudv, \quad (2.10)$$

la cual tiene una estructura de una transformada de Fourier, consecuentemente tenemos que la distribución de amplitudes es su transformada inversa de Fourier

$$A(u, v) = \int \int f(x, y) e^{-i2\pi(xu+yv)} dx dy, \quad (2.11)$$

debido a su simplicidad matemática, el modelo del espectro angular es particularmente útil para describir una gran variedad de campos ópticos.

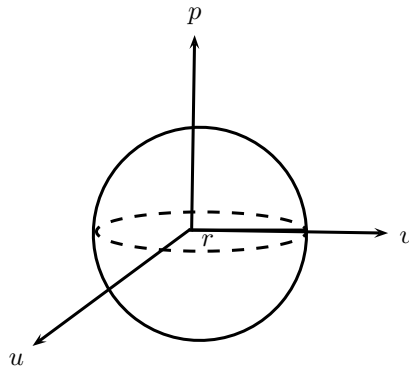


Figura 2.2: Esfera frecuencial con $r = \sqrt{\frac{k^2 - \beta^2}{4\pi^2}}$.

Una de esas simplicidades es que de forma natural se identifica la *función de fase*

$$L = 2\pi[xu + yv + zp], \quad \text{si } z=0 \implies L = 2\pi[xu + yv], \quad (2.12)$$

dicha expresión tiene un comportamiento extremal, es por eso, que se presentan algunos conceptos de calculo variacional.

2.3. Ecuación de Euler-Lagrange.

Existen problemas en física y matemáticas en las que es necesario determinar los máximos o mínimos de una cierta función $y = f(x)$ a la que podemos llamar *funcional* (son aquellas en las cuales el argumento de la función depende de otras funciones, variables y sus derivadas). Su estudio se conoce *cálculo variacional*.

Muchos problemas recaen en este contexto, ya que es muy común encontrarse con algo que se llaman *principios variacionales*, y a su vez estos se reducen al cálculo de una integral que tiene la forma ec.(2.13). Por ejemplo el principio de mínima acción (mecánica clásica o relativista), el principio de Fermat (en óptica) o el principio de Castiglianos (en la teoría de la elasticidad), etc.

Considere el caso de la función

$$\mathcal{V}[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)] dx, \quad (2.13)$$

manteniendo los puntos frontera fijos ver Fig.(2.3(a)). Supongamos que la curva $y = y(x)$ es diferenciable por lo menos dos veces, tomando cierta curva admisible $y = \bar{y}(x)$ cercanamente a $y = y(x)$ si se incluye en una familia de curvas monoparamétricas dada por

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha[\bar{y}(x) - y(x)] = y(x) + \alpha\delta y, \quad (2.14)$$

donde δy se conoce como la variación y admite derivadas de todo orden. Ver Fig.(2.3(b))

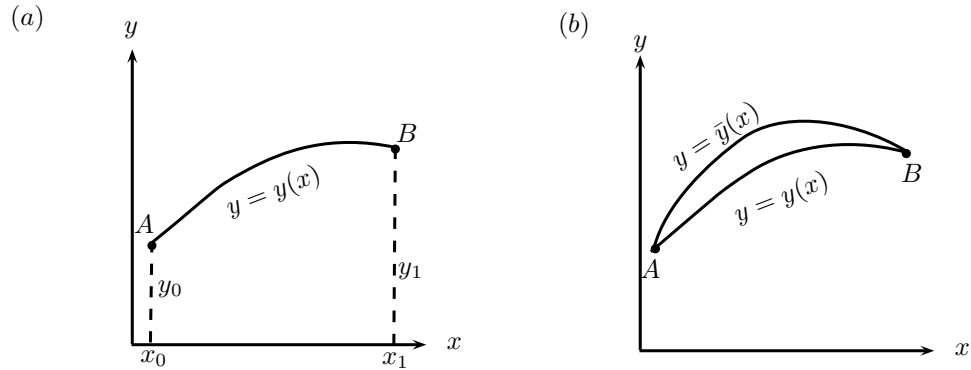


Figura 2.3: (a) Curva $y = y(x)$. (b) Curva $y = y(x, \alpha)$.

Una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{V}[y(x, \alpha)]$, sea una extremal en $\alpha = 0$, se debe cumplir que $\frac{\partial \mathcal{V}[y(x, \alpha)]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0$. Sustituyendo ec.(2.14) en ec.(2.13) se obtiene

$$\mathcal{V}[y(x, \alpha)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)] dx, \quad (2.15)$$

aplicando la condición extremal

$$\frac{\partial \mathcal{V}[y(x, \alpha)]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx, \quad (2.16)$$

donde

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{\partial}{\partial y} F[x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)], \\ F_{y'} &= \frac{\partial}{\partial y'} F[x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)], \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'(x) + \alpha \delta y'] = \delta y', \end{aligned}$$

podemos reescribir la ec.(2.16) usando las ecuaciones anteriores

$$\frac{\partial \mathcal{V}[y(x, \alpha)]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} [f_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx, \quad (2.17)$$

integrando por partes el segundo miembro

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y' dx &= F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx, \\ \text{pero, } \delta y \Big|_{x=x_0} &= 0 \text{ y } \delta y \Big|_{x=x_1} = 0. \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}[y(x, \alpha)]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \delta y dx = 0, \\ \text{como } \delta y \neq 0 \text{ y } dx \neq 0, &\text{ se obtiene,} \\ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} &= 0, \text{ Ecuación de Euler-Lagrange.} \end{aligned} \quad (2.18)$$

La ec.(2.18) se puede generalizar a más variables y a derivadas de ordenes mayores.

$$F_y^i - \frac{d}{dx} F_{y_i'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y_i''} + \dots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y_i^{n_i}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.19)$$

todo el análisis hecho anteriormente, sólo funciona para una sola curva, nosotros estamos interesados en el estudio de una familia de curvas o extremales, es decir que ahora se necesita por lo menos algún punto móvil y este tipo de estructuras se analizan a través de la *condición de transversalidad*.

2.4. Condición de transversalidad y descripción del frente de onda.

Consideremos puntos frontera móviles, es decir que por lo menos algún punto frontera de la curva puede desplazarse, por simplicidad asumiremos que el punto (x_0, y_0) está fijo, mientras que el punto (x_1, y_1) puede trasladarse y pasar al punto $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$. Ver Fig.(2.4)

Las extremales que pasan por el punto (x_0, y_0) forman una haz de extremales $y = y(x, c)$. En las curvas de este haz la funcional $\mathcal{V}[y(x, c)]$ se transforma en una función de c y x_1 . Si las curvas del haz $y = y(x, c)$ no se cortan en un entorno de la extremal considerada, entonces $\mathcal{V}[y(x, c)]$ puede considerarse como una función uniforme de x_1 e y_1 .

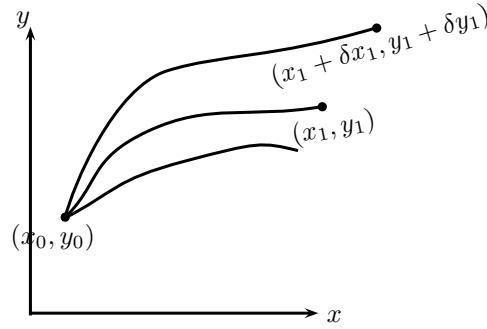


Figura 2.4: Familia de extremales.

Calculemos la variación de la funcional $\mathcal{V}[y(x, c)]$ en las extremales del haz $y = (x, c)$ cuando el punto frontera se desplaza de (x_1, y_1) a $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$, puesto que la funcional \mathcal{V} se transforma en una función de x_1 e y_1 en las curvas del haz, su variación coincide con la diferencial de esta función. Suponemos un incremento $\Delta \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{V} &= \int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} F[x, y + \delta y, y' + \delta y'] dx - \int_{x_0}^{x_1} F[x, y, y'] dx, \\
 &= \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F[x, y + \delta y, y' + \delta y'] dx + \int_{x_0}^{x_1} (F[x, y + \delta y, y' + \delta y'] - F[x, y, y']) dx,
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

la primera integral de la ec.(2.20) se transforma en

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F[x, y + \delta y, y' + \delta y'] dx = F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} \delta x_1,$$

con $x = x_1 + \theta\delta x_1$ siendo un desplazamiento infinitesimal y sabemos que F es continua, entonces se tiene

$$F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F[x, y, y']|_{x=x_1} + \epsilon,$$

donde $\epsilon \rightarrow 0$ cuando $\delta x_1 \rightarrow 0$ y $\delta y \rightarrow 0$ tal que

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F[x, y + \delta y, y' + \delta y'] dx = F[x, y, y']|_{x=x_1} \delta x_1 + \epsilon \delta x_1 = 0. \quad (2.21)$$

Analicemos la segunda integral de la ec.(2.20). Haciendo un desarrollo en serie de Taylor y quedándose a primer orden se encuentra

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F[x, y + \delta y, y' + \delta y'] - F[x, y, y'] dx &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y[x, y, y']\delta y + F[x, y, y']\delta y) dx, \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y\delta y + F_{y'}\delta y') dx, \end{aligned} \quad (2.22)$$

esta última expresión se puede reducir a la forma

$$F_{y'}\delta y|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (f_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx. \quad (2.23)$$

Los valores de la funcional se toman sólo en la extremal, por lo tanto, $f_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$. Como el punto frontera está fijo, tenemos que $\delta y|_{x=x_0} = 0$. Por consiguiente

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\delta y + F_{y'}\delta y') dx = [F_{y'}\delta y]|_{x=x_1}. \quad (2.24)$$

Obsérvese que $\delta y|_{x=x_1}$ no es igual a δy_1 , ya que δy_1 es el incremento de y_1 al desplazarse el punto frontera a la posición $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$, mientras que $\delta y|_{x=x_1}$ es el incremento de la ordenada en el punto x_1 al pasar de la extremal que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) a la extremal que pasa por los puntos (x_0, y_0) y $(x_1 + \delta x_1, y + \delta y_1)$. Ver Fig.(2.5(a)).

De la Fig.(2.5(b)) notamos que $\delta y_0 + \delta y = \delta y_1$, entonces podemos reescribirla como $\frac{\delta y_0}{\delta x} = \frac{\delta y_1 - \delta y}{\delta x}$ y finalmente se deduce que $\delta y = \delta y_1 - \delta y'_0 \delta x$. De tal modo que

$$\int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F dx \approx F|_{x=x_1} \delta x_1, \text{ entonces}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx \approx F_{y'}|_{x=x_1} (\delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1),$$
(2.25)

donde $y' = \delta y'$. Por lo tanto de ec.(2.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{V} &= F|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} (\delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1) \\ &= (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1, \end{aligned}$$
(2.26)

tomando la condición de extremal

$$\begin{aligned} (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 &= 0, \\ \implies (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} &= - F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 / \delta x_1 = 0. \end{aligned}$$
(2.27)

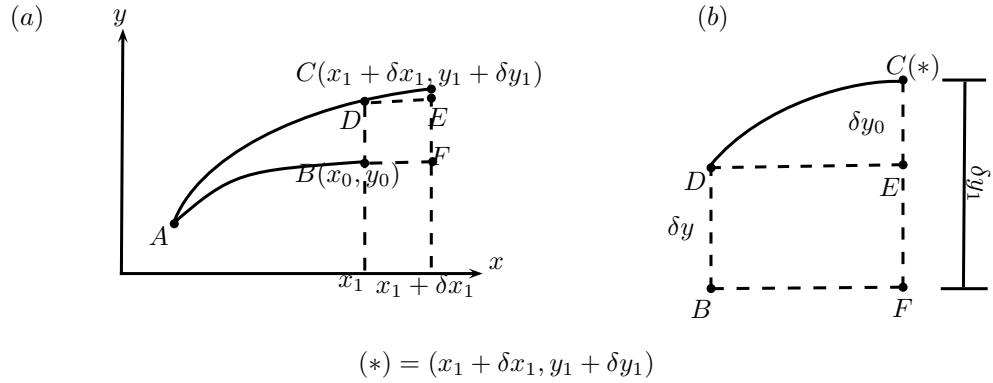


Figura 2.5: (a) Variación de una extremal a otra. (b) Geometría de la extremal.

Supongamos, por ejemplo, que el segundo punto frontera (x_1, y_1) puede trasladarse por una cierta línea

$$y_1 = \phi(x_1),$$
(2.28)

entonces $\delta y_1 \approx \phi' \delta x_1$ y por lo tanto la ec.(2.27) toma la forma

$$F + (\phi' - y')F_{y'} = 0, \quad (2.29)$$

las ecs.(2.28) y (2.29) representan a un *frente de onda* en el contexto óptico y la *condición de transversalidad* respectivamente.

Para asociar una interpretación geométrica a la ecuación anterior es conveniente analizar la trayectoria que sigue un haz de luz en un medio cuyo índice de refracción depende de la posición, esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{x_0}^{x_1} n(x, y) ds, \text{ o mejor dicho} \\ DCO &= \int_{x_0}^{x_1} n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx, \end{aligned} \quad (2.30)$$

la ec.(2.30) se conoce como el *Principio de Fermat*, donde *DCO* es la diferencia de camino óptico, aquí $n = \frac{c}{v}$ es el índice de refracción, c es la velocidad de la luz en el vacío, v la velocidad de la luz en el medio y ds es el elemento de longitud en el plano. De la ec.(2.13) podemos identificar la forma del funcional y etiquetarlo como frecuentemente se hace con la letra F , para nuestro caso $F = n(x, y) \sqrt{1 + y'^2}$ y aplicando la ec.(2.29) se encuentra

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{n(x, y)(1 + y'^2)}{\sqrt{1 + y'^2}} + (\phi' - y')F_{y'}, \\ &= \frac{n(x, y)(1 + y'^2)}{\sqrt{1 + y'^2}} + (\phi' - y') \left[n(x, y) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right], \\ &= n(x, y)(1 + \phi' y'), \text{ si } n(x, y) \neq 0 \implies \\ y' &= \frac{-1}{\phi'}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

la expresión (2.31) se le conoce como *condición de ortogonalidad*.

Para finalizar este capítulo, analicemos el *DCO*, por simplicidad supondremos que $n(x, y) = n(y)$, entonces, apliquemos la condición de extremal que conduce a la ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} n(y) \sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} n(y) \sqrt{1 + y'^2} \right) &= 0, \\ \implies \frac{dn(y)}{n(y)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

note que la ec.(2.32) tiene una estructura complicada de analizar, pero eso no significa que no sea soluble, solo hay que seguir otro camino, para eso se utilizará la *segunda forma de ecuación de Euler-Lagrange* .

Existe una segunda forma, tal que si el funcional F no dependa explícitamente de x : $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Primero notamos que para cualquier función $F(y, y'; x)$ la derivada total es una suma de términos

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \frac{dF[y, y'; x]}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} \\ &= y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Además se sabe que

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right), \quad (2.34)$$

sustituyendo $y'' \frac{\partial F}{\partial y'}$ en ec.(2.33) se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - y' \frac{\partial F}{\partial y} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right), \quad (2.35)$$

los dos últimos términos de la ec.(2.35) se cancelan, dado que satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{dF}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

La ec.(2.36) es otra forma de escribir a la ecuación de Euler-Lagrange. En el caso cuando F no depende explícitamente de x esta se reduce a

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \kappa, \quad (2.37)$$

donde $\kappa = \text{constante}$. En muchos problemas ópticos se implica un análisis de la propagación de la luz en medios estratificados, es decir el índice de

refracción depende de una sola coordenada, la cual puede ser y

$$\begin{aligned} n(y)\sqrt{1+y'^2} - y'n(y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} &= \kappa, \\ \frac{n(y)(1+y'^2)}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} &= \kappa, \\ \frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}} &= \kappa. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Reescribiendo la ec.(2.38)

$$\begin{aligned} dx &= \kappa^2 \frac{dy}{\sqrt{n^2(y) - \kappa^2}}, \text{ si } n(y) = y \implies x = \kappa^2 \cosh^{-1}\left(\frac{y}{\kappa}\right) + \kappa_1, \\ \implies y &= \kappa \cosh\left(\frac{x - \kappa_1}{\kappa^2}\right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

La ec.(2.39) recibe el nombre de *catenaria*, esta consiste en una cuerda o cadena inextensible y flexible bajo la acción del campo gravitacional. Una propiedad importante es que la curva es simétrica respecto al eje y y los puntos más bajos de la curva tienden a formar una ecuación tipo parabólica. Esto se puede ver fácilmente, sólo tiene que escribir la función $\cosh \frac{x-\kappa_1}{\kappa^2}$ en términos de exponenciales y quedarse a segundo orden, encontrándose con una curva de la forma

$$y \approx \kappa + \frac{1}{2\kappa^3}(x^2 - 2x\kappa_1 + \kappa_1^2),$$

cuya expresión tiene la estructura de una curva de segundo orden, que por lo general describen a curvas tipo parabólicas.

Por último, existe una relación del espectro angular y el comportamiento extremal de una sola curva dada por

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ y } \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad (2.40)$$

pero en la mayoría de los casos no estamos interesados en la evolución de una curva, sino en toda una familia de curvas, es decir la curva envolvente y que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0, \quad (2.41)$$

la solución de ec.(2.41) está dada por $L = cte. = x^\alpha y^{1-\alpha}$ (apéndice A). Esta ecuación tiene un paralelismo con los modelos de termodinámica para procesos adiabáticos, por esta razón a las regiones focales que cumplen con ec.(2.41) se dice que tienen fase adiabática y nos da la *evolución de la fase*, en donde se exige una relación funcional entre u y v , es decir $v = v(u)$. Además comparte una estructura muy peculiar a ecuaciones de tipo parabólico que en su momento, serán discutidas.

CAPÍTULO 3

Conceptos de Geometría Diferencial.

En este capítulo se analiza el comportamiento local del campo óptico cuyo lenguaje natural es el de geometría diferencial, el estudio permite identificar las regiones en donde surgen efectos como bifurcación y morfogenesis. Es bien sabido, que la geometría diferencial es un campo muy amplio y con un sin fin de aplicaciones, por ejemplo en el contexto óptico existen transiciones de superficies a curvas y/o puntos. Además nos restringiremos a unos cuantos conceptos de vital importancia para este trabajo de tesis. La idea es dar una descripción matemática, física y geométrica de las curvas de *rango cero, uno y dos*, las cuales describen a un punto, una curva y por último a una superficie respectivamente, con el fin de incorporarlos a los conceptos de óptica clásica.

En óptica clásica hay algunos modelos en lo cuales existen transiciones de superficie a curvas y/o puntos, estas transiciones son observadas en la región focal. Por ejemplo, la evolución de un frente de onda que emerge de una lente (superficie). Ver Fig.(3.1).

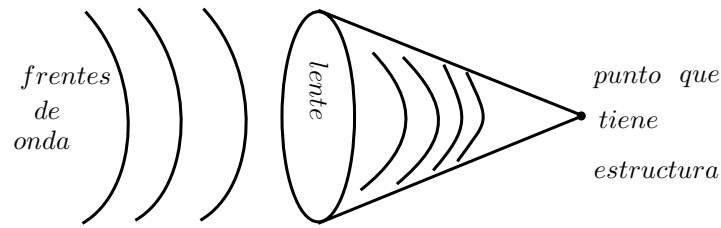


Figura 3.1: Frente de onda a través de una lente.

Surge una pregunta inmediata ¿ Que modelo matemático exhibe la evolución de una superficie a curvas y/o puntos? la respuesta inmediata son los modelos de geometría diferencial, ya que se sabe que una superficie puede ser caracterizada por unas coordenadas curvilíneas. Por ejemplo, sea (u, v) las coordenadas curvilíneas asociadas a una superficie S , que para este caso en particular tiene la forma de una maya (Fig.(3.2)(a)), esta se estira de un solo lado y como consecuencia esas líneas rectas se curvan (Fig.(3.2)(b)), esto nos da una idea de que en algún momento todas esas curvas se compactan en una sola curva, entonces, de forma intuitiva hemos pensado en que una superficie S evoluciona a una curva. Lo anterior nos conduce a que debemos realizar la descripción de un punto, una curva y de alguna superficie, mencionando por lo menos algunas de sus características más importantes. Para ello, se discutirá la definición de un punto, seguida de una curva en la cual describiremos sus propiedades que la caracterizan; por ejemplo su vector tangente, su longitud de arco, etc., finalizaremos con la descripción de una superficie en la cual resaltamos sus características más relevantes y las sintetizamos en el análisis de superficies a través de los teoremas de *Meusnier* y *Euler*.

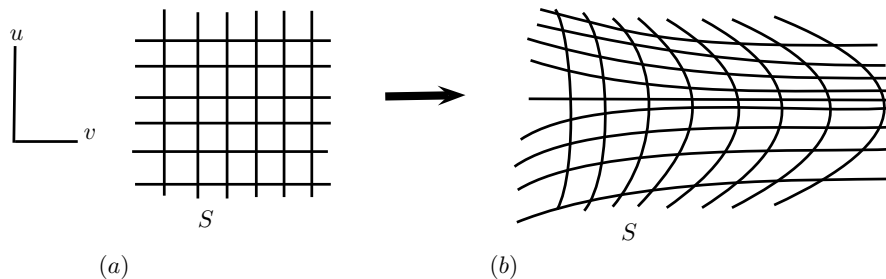


Figura 3.2: (a) Superficie S . (b) Estiramiento de la superficie S .

3.1. Región de rango cero.

Como se describió antes, una curva de rango cero es un punto el cual no tiene dimensiones ni se puede subdividir, es decir no representa algo físico y aun así es muy útil en la física ya que en la mayoría de los casos un objeto físico es representado por un punto (centro de masa), por ejemplo en electromagnetismo solemos decir que se tiene una carga puntual en una superficie o volumen he inmediatamente la etiquetamos como un punto. En geometría se le atribuye como un ente fundamental, esto quiere decir que únicamente puede definirse realizando una comparación con otros elementos. De este modo, el punto no se define por si mismo, sino que adquiere su significado a partir de su relación con otros conceptos, es común decir que si se tiene un número infinito de puntos consecutivos estos forman una curva o recta y a su vez si estas curvas o rectas se interceptan en un punto formando algo que se conoce como sistema coordenado o marco de referencia en donde generalmente el punto de intersección es el origen (O), siguiendo esta línea de pensamiento, un punto representa la posición en un marco de referencia o incluso de algún sistema físico o evento (Fig.(3.3)(a)). Otros ejemplos se dan en el espacio de configuraciones o el espacio fase, donde un punto (q_i, \dot{q}_i) o (q_i, p_i) representan la evolución de un sistema físico en sus respectivos espacios, podemos seguir mencionando otros ejemplos. Por último mencionaremos algo referente a *puntos umbilicos* o *puntos de inflexión*, más adelante se describen, lo interesante de estos puntos es que puede existir un desdoblamiento sobre él, generando una curva en cierta región (Fig.(3.3)(b)), done aparecen nuevos efectos en el campo óptico difractado que en su momento se discutirán.

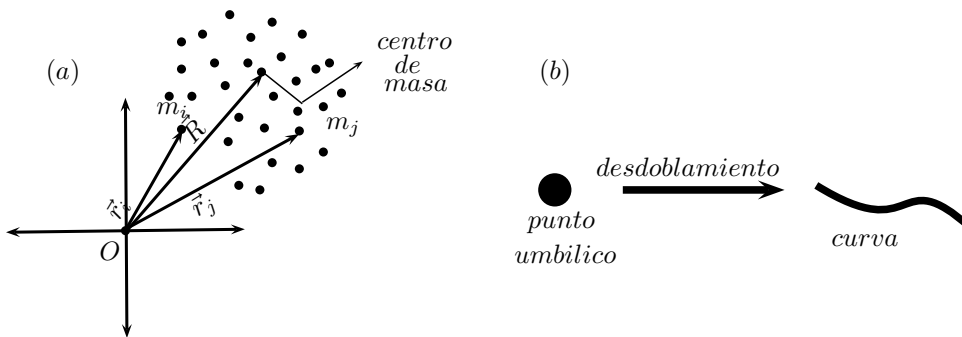


Figura 3.3: (a) Centro de masa de un sistema de partículas. (b) Desdoblamiento de un punto umbilico.

3.2. Región de rango uno.

Siguiendo la línea de pensamiento, se había mencionado que un número infinito de puntos consecutivos forman una línea recta o curva denominadas curvas de rango uno, su estudio es infinitamente amplio, aquí sólo describiremos algunos conceptos básicos y fundamentales.

Representación analítica de una curva.- Podemos pensar, dada una curva en el espacio como la trayectoria de un punto en movimiento y suponemos que dicho punto está etiquetado por una triada de funciones (x, y, z) que a su vez pueden depender de algún parámetro u dentro de un cierto intervalo cerrado, generalmente el parámetro u está asociado al tiempo.

$$\begin{aligned} x &= x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u); \quad u \in [u_1, u_2], \quad \text{de forma compacta} \\ x_i &= x_i(u), \end{aligned} \tag{3.1}$$

además $P(x_i)$ indica un punto con coordenadas x_i . El ejemplo más simple de curva es una línea recta vectorial 3D, donde \vec{r} es un vector cualquiera asociado a un punto arbitrario, \vec{r}_0 es un vector particular asociado a un punto conocido, u es un parámetro y finalmente \vec{L} es el vector de dirección que une a \vec{r} y \vec{r}_0 (Fig.(3.4)), dicha ecuación es dada por

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}_0 &= u\vec{L}, \quad \text{la cual se descompone en} & (3.2) \\ \frac{x-a}{d} &= u, \quad \frac{y-b}{e} = u, \quad \frac{z-c}{f} = u, \\ \implies \frac{x-a}{d} &= \frac{y-b}{e} = \frac{z-c}{f}, \quad \text{ecuaciones estandar de la recta} \\ x &= a + ud, \quad y = b + ue, \quad z = c + uf, & (3.3) \\ &\text{ecuaciones paramétricas de la línea recta.} \end{aligned}$$

Note que la ec.(3.2) cumple con la condición de paralelismo, es decir se satisface $\vec{w} = k\vec{v}$, donde $k \in R$, podemos asumir que (3.2) es una *curva característica*, su estudio se dará en el capítulo IV.

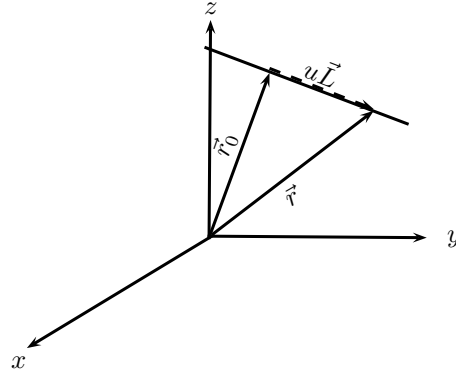


Figura 3.4: Línea recta en 3D.

Ahora consideremos que existe un punto P de la curva tal que $u = u_0$, es decir, que la curva en ese punto sea derivable ($x_i^{n+1}(u_0)$) lo cual nos proporciona información, diciéndonos que la curva es continua, entonces podemos expresar a $x_i(u_0 + h)$ términos de una serie de Taylor.

$$x_i(u) = x_i(u_0 + h) = x_i(u_0) + \frac{h}{1!}x_i^1(u_0) + \frac{h^2}{2!}x_i^2(u_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}x_i^n(u_0), \quad (3.4)$$

donde $x_i^1(u_0)$, $x_i^2(u_0)$, \dots , $x_i^n(u_0)$ representa su primera, segunda y n-esima derivada respecto de u . De aquí en adelante se considerarán funciones de variables reales, a menos que se especifique otra cosa. La ec.(3.1) junto con (3.4) es llamada *arco de curva* o simplemente *curva*. Además existen dos tipos de puntos: *puntos singulares* son aquellos en los cuales se cancelan las x_i^1 y cuando no ocurre lo anterior se conocen como *puntos regulares*. Cuando hablamos de puntos regulares lo que se quiere decir es que podemos remplazar u por otro parámetro.

$$u = f(v), \quad (3.5)$$

se pide que $f(v)$ sea diferenciable; cuando $\frac{du}{dv} \neq 0$ lo cual significa que los puntos son regulares. Existen otras formas de poder escribir una curva

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad (3.6)$$

o

$$y = f_1(x), \quad z = f_2(x), \quad (3.7)$$

las expresiones anteriores definen una curva, podemos considerar que las ecs.(3.7) son un caso especial de ec.(3.1), tomando a x como parámetro, si hacemos esto, obtenemos de ec.(3.1) $u = u(x)$ y sustituyendo en y e z , esto es posible si y solo si $\frac{dx}{du} \neq 0$, entonces u puede escribirse en términos de x . Por otro lado la ec.(3.6) define dos funciones implícitas $y(x)$ y $z(x)$, cuando el determinante de la funcional, es decir el Jacobiano satisface

$$J(y, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial y} \neq 0, \quad (3.8)$$

esto nos lleva a ec.(3.7) y por lo tanto a ec.(3.1). Las representaciones de ec.(3.6) y ec.(3.7) definen una curva en el espacio como la intersección de dos superficies, pero tal intersección debe dividirse en varias curvas. Generalmente siempre se etiqueta a una curva C de la forma (3.1), ya que esta nos permite una aplicación rápida y directa al análisis vectorial, por ejemplo.

Consideremos una curva C en R^3 tal que \hat{e}_i son los vectores unitarios en las direcciones positivas de sus respectivos ejes (ver Fig.(3.5)), entonces podemos definir una curva C expresando su radio vector $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ de un punto genérico P como función de u de tal forma que

$$\vec{r}(u) = x(u)\hat{e}_1 + y(u)\hat{e}_2 + z(u)\hat{e}_3, \quad (3.9)$$

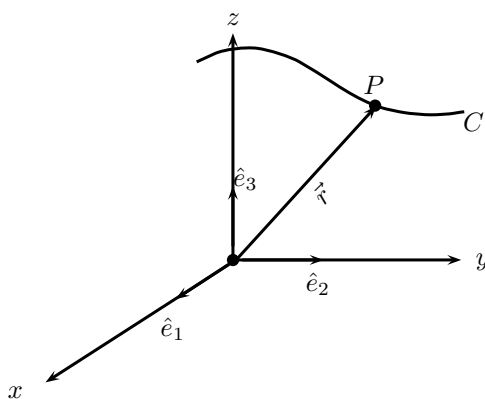


Figura 3.5: Curva en R^3 .

Por definición la norma o modulo del radio vector es

$$|\vec{r}(u)| = \sqrt{x^2(u) + y^2(u) + z^2(u)} \geq 0. \quad (3.10)$$

Longitud de arco.- Se expresa la longitud de arco como el segmento de la curva entre dos puntos $A(u_0)$ y $P(u)$ por medio de la integral o también llamada métrica

$$\begin{aligned} s(u) &= \int_{u_0}^u \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} du, \quad \text{con } \frac{d\dot{x}}{du} = \ddot{x}, \\ &= \int_{u_0}^u \sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} du. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Note que si se incrementa u , la longitud de arco también lo hace, es decir hay una relación funcional. El sentido de incremento geoméricamente se interpreta como el desplazamiento sobre la curva en la dirección positiva y si disminuye significa que nos estamos moviendo en dirección negativa, es decir, existe una orientación sobre la curva.

La ec.(3.11) define una métrica, heredada del *producto punto* o *producto escalar* la cual siempre es positiva o cero en el peor de los casos. Resaltando una propiedad importante de ds^2 es que es *invariante bajo transformación de coordenadas* y toma la forma

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}, \quad (3.12)$$

la cual es independiente de u . Introduciendo a s como parámetro en vez de u obtenemos

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 1, \quad (3.13)$$

el vector $\frac{d\vec{r}}{ds}$ es *unitario* y tiene una simple interpretación geométrica.

Sea el vector $\Delta\vec{r}$ tal que une dos puntos $P(\vec{r})$ y $Q(\Delta\vec{r} + \vec{r})$ sobre la curva C , el vector $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ tiene la misma dirección que $\Delta\vec{r}$ y para $\Delta s \rightarrow 0$ pasa a ser el **vector tangente** en P . (Ver Fig.(3.6)). Además posee norma uno, de esta forma dicho vector es llamado *vector tangente unitario* y se define como

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (3.14)$$

Por otro lado se puede construir otro vector tangente aunque no necesariamente unitario

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{du} = \hat{t} \frac{ds}{du}, \quad (3.15)$$

es decir $\hat{t} \parallel \frac{d\vec{r}}{du}$. Frecuentemente expresamos el hecho de que la tangente es la posición límite de una línea a través de P y Q en un intervalo de u dado. Cuando $Q \rightarrow P$, se dice que la *tangente pasa a través de dos puntos consecutivos sobre la curva*, sintetizando este resultado de una forma concreta, se anuncia el siguiente teorema.

Teorema.- *La relación de arco y el segmento que conecta dos puntos P y Q en una curva se aproxima a la unidad cuando $Q \rightarrow P$.*

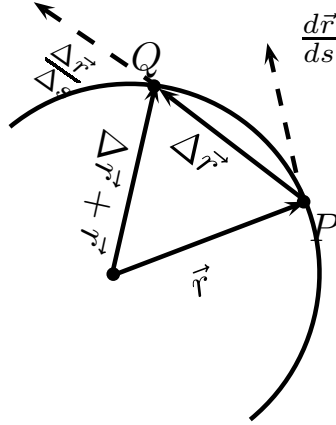


Figura 3.6: Vector tangente a la curva.

Observe que si diferenciamos ec.(3.14), $\frac{d\hat{t}}{ds}$, este es perpendicular a \hat{t} . Más aún, su derivada, nos dice que tan rápido está cambiando de dirección el vector unitario tangente conforme nos movemos a lo largo de la curva. La normal principal a la curva se define consecuentemente por la ecuación

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa \hat{n}, \quad (3.16)$$

en donde κ es la magnitud de $\frac{d\hat{t}}{ds}$ y se llama *curvatura*. El recíproco de la curvatura, $\rho = \frac{1}{\kappa}$, es llamado *radio de curvatura*. Es importante hacer notar que la ec.(3.16) define tanto a κ como \hat{n} , siendo κ la longitud de $\frac{d\hat{t}}{ds}$ mientras

que \hat{n} es el vector unitario paralelo a $\frac{d\hat{t}}{ds}$. En cualquier punto P de nuestra curva tenemos ahora dos vectores \hat{t} y \hat{n} siendo mutuamente perpendiculares, esto nos permite establecer un sistema local de coordenadas en P definiendo un tercer vector perpendicular a ellos, definido como el *vector binormal*

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}. \quad (3.17)$$

Todos los vectores asociados con la curva en el punto P pueden escribirse como una combinación lineal de los tres vectores fundamentales \hat{t} , \hat{n} , y \hat{b} que forman un *sistema triedrico* en P . (Ahora se tiene un sistema local de referencia móvil sobre la curva. (Fig.(3.7)(a)).

Evaluemos $\frac{d\hat{b}}{ds}$ y $\frac{d\hat{n}}{ds}$. Como \hat{b} es unitario, su derivada es perpendicular a \hat{b} y por lo tanto, se halla en el plano de \hat{t} y \hat{n} . Más aún, $\hat{b} \cdot \hat{t} = 0$, de tal manera que al diferenciar obtenemos

$$\frac{d\hat{b}}{ds} \times \hat{t} + \kappa \hat{b} \times \hat{n} = 0$$

o $\frac{d\hat{b}}{ds} \cdot \hat{t} = 0$. De aquí que $\frac{d\hat{b}}{ds}$ es también perpendicular a \hat{t} de tal manera que $\frac{d\hat{b}}{ds}$ debe ser paralelo a \hat{n} . Consecuentemente, $\frac{d\hat{b}}{ds} = \tau \hat{n}$, en donde τ por definición es la magnitud de $\frac{d\hat{b}}{ds}$. τ es llamada *torsión de la curvatura*. Finalmente para obtener $\frac{d\hat{n}}{ds}$, notemos que $\hat{n} = \hat{b} \times \hat{t}$ así que

$$\frac{d\hat{n}}{ds} = \hat{b} \times \frac{d\hat{t}}{ds} + \frac{d\hat{b}}{ds} \times \hat{t} = \hat{b} \times \kappa \hat{n} + \tau \hat{n} \times \hat{t} = -\kappa \hat{t} - \tau \hat{b}.$$

Los resultados anteriores se pueden simplificar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \hat{t}' &= \frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa \hat{n}, \\ \hat{n}' &= \frac{d\hat{n}}{ds} = -\kappa \hat{t} + \tau \hat{b}, \\ \hat{b}' &= \frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau \hat{n}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

junto con $\frac{d\vec{x}}{ds} = \hat{t}$, describen el movimiento del sistema triedrico a lo largo de la curva. Las expresiones de arriba toman una posición central en la teoría del espacio de curvas y son conocida como *Formulas de Frenet* o *Serret-Frenet*.

con Σ_1 en P , cuando $A \rightarrow P$ a lo largo de Σ_1

$$\lim_{A \rightarrow P} \frac{AD}{(AP)^k},$$

es finito ($\neq 0$) para $k = n + 1$, y cero para $k = n$. [$AD = 0$ (AP) k para $k = 1, 2, 3, \dots, n$].

Supondremos que Σ_1 es una curva $\vec{r}(u)$ y Σ_2 es una superficie $F(x, y, z) = 0$. Ver Fig.(3.8)

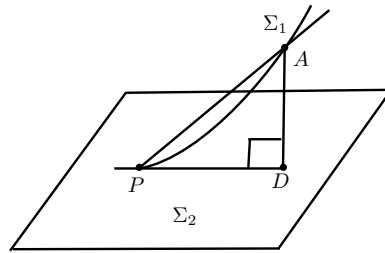


Figura 3.8: Representación geométrica.

Hacemos uso del hecho de la distancia AD de un punto $A(x_1, y_1, z_1)$ cerca de P es del mismo orden que la superficie $F(x_1, y_1, z_1)$. La prueba general requiere de algunos conceptos de teoría de superficies.

Consideremos una parametrización de la superficie tal que

$$f(u) = F(x(u), y(u), z(u)), \quad (3.22)$$

supóngase que $f(u)$ es suave, esto significa que es derivable y que admite derivadas del orden $n + 1$ evaluadas en un punto fijo $P(u = u_0)$, es decir, $f(u)$ admite un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto $P(u = u_0)$

$$f^i(u_0), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n + 1. \quad (3.23)$$

Entonces si tomamos a $u = u_1$ en el punto A y definimos a $h = u_1 - u_0$, nuevamente suponemos que también admite un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto $P(u_1 = h + u_0)$, dicho de otra forma, $f^i(u_1) = f^i(h + u_0)$, note que esta última expresión tiene la misma estructura que la ec.(3.4), entonces

$$f(u_1) = f(u_0) + \frac{h}{1!} f'(u_0) + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(u_0) + o(h^{n+1}), \quad (3.24)$$

donde $f(u_0) = 0$, ya que P se encuentra sobre Σ_2 y h es del orden AP ; $f(u_1)$ es del orden AD . Por lo tanto una condición necesaria y suficiente es que la superficie tiene un contacto orden n en P con la curva, son aquellas en las cuales P mantiene la siguiente relación

$$f(u_0) = f'(u_0) = f''(u_0) = \cdots = f^n(u_0) = 0, \quad f^{n+1}(u_0) \neq 0, \quad (3.25)$$

de la misma forma encontramos que si Σ_2 es una curva definida por

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad (3.26)$$

una condición necesaria y suficiente para un contacto de orden n en P entre la curva que esta en P

$$\begin{aligned} f_1(u) = f'_1(u) = \cdots = f^n_1(u) = 0, \\ f_2(u) = f'_2(u) = \cdots = f^n_2(u) = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde

$$f_1(u) = F_1(x(u), y(u), z(u)), \quad f_2 = F_2(x(u), y(u), z(u)),$$

y al menos una de las dos derivadas $f_1^{n+1}(u)$, $f_2^{n+1}(u)$ en P no se anula.

3.3. Región de rango dos.

Entendemos por superficie el lugar geométrico de un punto que se mueve en el espacio R^3 con dos grados de libertad. También podemos pensar en una superficie como el resultado de enrollar, curvar y comprimir un plano en el espacio.

Definición.- Una superficie biparametrica es una función $\Phi : D \subset R^2 \rightarrow R^3$, donde D es algún dominio en R^2 . La superficie S correspondiente a la función Φ es su imagen. Es decir $S = \Phi(D)$ con $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Hemos supuesto que las funciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$, donde u y v son frecuentemente citadas en la literatura como coordenadas curvilíneas las cuales caracterizan a la superficie S , sin olvidar que el asunto puede ser invertible, esto implica que el *Jacobiano* asociado a la transformación sea diferente de cero y que este a su vez está relacionado con un par de vectores tangentes en un punto sobre la superficie S , lo anterior se ira discutiendo conforme avancemos.

Si Φ es diferenciable o de clase C^1 (que equivale a decir que $x(u, v)$, $y(u, v)$, y $z(u, v)$ son diferenciables o de clase C^1 de (u, v)), entonces decimos que S es diferenciable o de clase C^1 .

Podemos pensar que Φ dobla o tuerce la región D en un plano para producir la superficie S . Así cada punto (u, v) se convierte en un rótulo para el punto $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ en S . Ver (Fig.(3.9)).

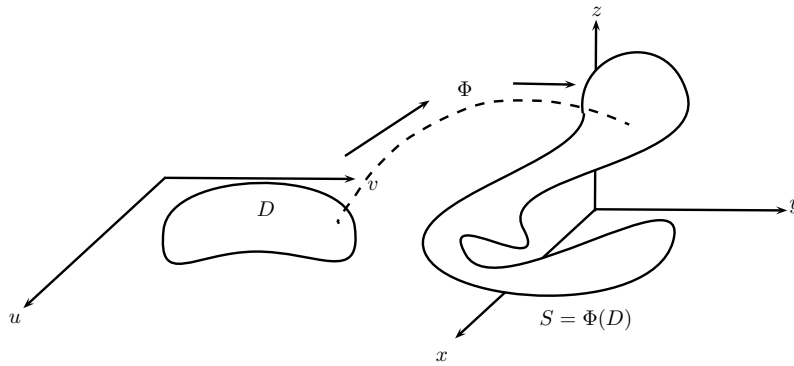


Figura 3.9: Φ tuerce y dobla a D sobre la superficie $S = \Phi(D)$.

Supongamos que Φ es diferenciable en $(u_0, v_0) \in R^2$. Fijando u en u_0 obtenemos una función $R \rightarrow R^3$ dada por $t \rightarrow \Phi(u_0, t)$, cuya imagen es una curva sobre la superficie (Fig.(3.10)). El vector tangente a esta curva en el punto $\Phi(u_0, v_0)$ es definido por

$$\vec{r}_v = \frac{\partial x(u_0, v)}{\partial v} \hat{e}_1 + \frac{\partial y(u_0, v)}{\partial v} \hat{e}_2 + \frac{\partial z(u_0, v)}{\partial v} \hat{e}_3, \quad (3.28)$$

de forma análoga, si fijamos $v = v_0$

$$\vec{r}_u = \frac{\partial x(u, v_0)}{\partial u} \hat{e}_1 + \frac{\partial y(u, v_0)}{\partial u} \hat{e}_2 + \frac{\partial z(u, v_0)}{\partial u} \hat{e}_3, \quad (3.29)$$

los vectores \vec{r}_u y \vec{r}_v son tangentes a curvas sobre la superficie S y por lo tanto son tangentes a S . En especial si $\Phi = \Phi(u_0, v_0)$ debe determinar un plano tangente a la superficie en ese punto, esto es $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ debe ser normal a la superficie. Ver Fig.((3.11)(b))

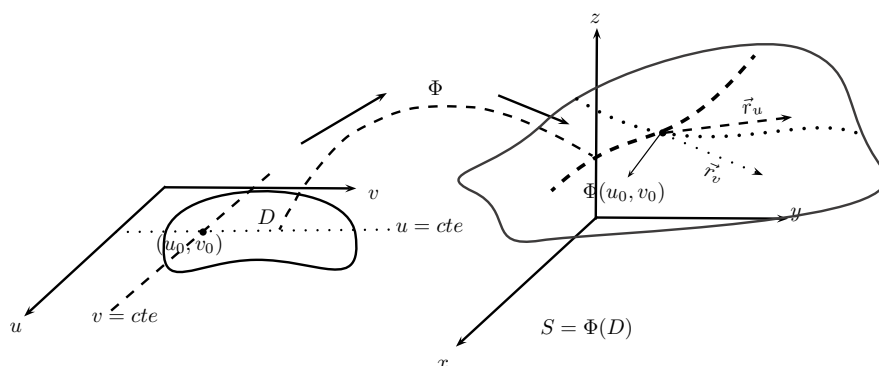


Figura 3.10: Líneas rectas en $D \subset \mathbb{R}^2$ generan curvas en \mathbb{R}^3 .

Decimos que la superficie S es *suave* en $\Phi(u_0, v_0)$ si $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ en (u_0, v_0) ; la superficie es suave si lo es en todos los puntos $\Phi(u_0, v_0) \in S$, de lo contrario se dirá que la superficie S contiene una *singularidad*. Estrictamente hablando, la suavidad depende de la naturaleza de la superficie y de la elección de las coordenadas. Resumamos nuestras conclusiones en una definición formal.

Definición.- Si una superficie biparamétrica $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es suave en $\Phi(u_0, v_0)$, esto es, si $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$, definimos el plano tangente a la superficie S en $\Phi(u_0, v_0)$ como el plano determinado por los vectores \vec{r}_u y \vec{r}_v .

Una ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) a la superficie está dado por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{N} = 0, \quad (3.30)$$

donde \vec{N} es evaluado en (u_0, v_0) .

3.4. Primera Forma Fundamental.

Dada una relación $\eta(u, v) = 0$ entre las coordenadas curvilíneas y una curva sobre la superficie. Dicha curva puede ser dada en forma paramétrica

$$u = u(t), \quad v = v(t) \implies \vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (3.31)$$

por lo tanto el vector tangente en un punto P se define como

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v}, \quad (3.32)$$

el cual es tangente a la curva y por ende también a la superficie, además no depende de la elección del parámetro, es decir

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv. \quad (3.33)$$

Cuando la curva es dada por $\eta(u, v) = 0$, los elementos du y dv están conectados por la relación

$$\eta_u du + \eta_v dv = 0 \implies \frac{dv}{du} = -\frac{\eta_u}{\eta_v}, \quad (3.34)$$

la ec.(3.34) representa una razón de cambio, dicho cambio es suficiente para determinar la dirección de la tangente sobre la superficie.

Sustituyendo la ec.(3.33) en ec.(3.12), encontramos la distancia entre dos puntos P y Q sobre una curva, teniendo la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) \cdot (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv), \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Fdv^2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v, \quad (3.36)$$

los coeficientes E , F y G son funciones de u y v . Finalmente se halla la distancia entre dos puntos integrando ec.(3.35)

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{dv}{dt} \frac{du}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt, \quad (3.37)$$

La expresión (3.35) es llamada *primera forma fundamental* de la superficie, es una ecuación diferencial cuadrática y su raíz cuadrada ds puede ser tomada como su longitud $|d\vec{r}|$ de el vector diferencial \vec{r} sobre la superficie y es llamado *elemento de arco*.

Note que ec.(3.35) siempre es positiva, excepto cuando $du = 0$ y $dv = 0$, reescribiendo dicha expresión

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{E} (Edu + Fdv)^2 + \frac{EG - F^2}{E} dv^2, \\ \text{con } E &= \vec{r} \cdot \vec{r} > 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Podemos ver que $EG - F^2 > 0$, ya que es heredado de $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$, así que

$$(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = EG - F^2. \quad (3.39)$$

La ec.(3.39) comparte una estructura equivalente a la ec.(2.41), en sentido de que (2.41) es la curva envolvente de toda una familia de extremales, generando así una superficie o elemento de área que también es generado por ec.(3.39).

Con ayuda de E , F y G , se expresa un ángulo α de dos direcciones tangentes a la superficie dadas por $\frac{du}{dv}$, $\frac{\delta u}{\delta v}$. Entonces

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \quad \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v, \quad (3.40)$$

donde

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\delta\vec{r} \cdot d\vec{r}}{|\delta\vec{r}| |d\vec{r}|}, \\ &= \frac{\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u du \delta u + (\delta u dv + \delta v du)(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \delta v \delta v}{|\delta\vec{r}| |d\vec{r}|}, \\ &= \frac{E du \delta u + F(\delta u dv + \delta v du) + G \delta v \delta v}{JJ'}, \\ &= E \frac{du}{ds} \frac{\delta u}{\delta s} + F \left(\frac{du}{ds} \frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{ds} \frac{\delta u}{\delta s} \right) + G \frac{dv}{ds} \frac{\delta v}{\delta s}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

con

$$J = \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}, \quad J' = \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}.$$

A continuación se muestra una figura en la cual se representa el ángulo entre las curvas asociadas a los vectores tangentes en un punto sobre una superficie. (Fig.(3.11)(a))

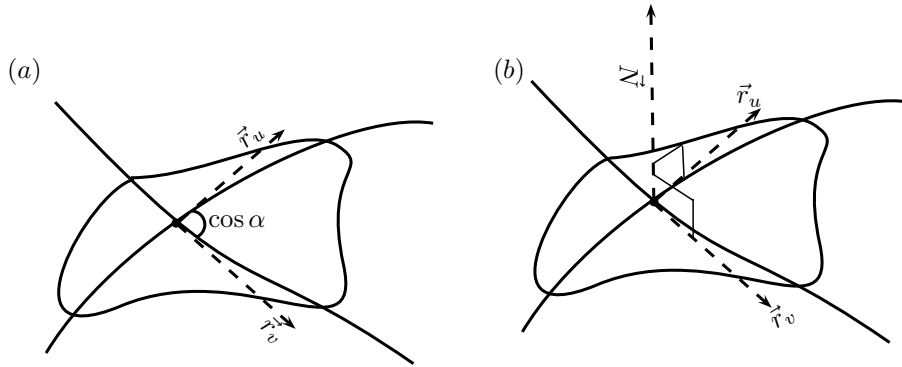


Figura 3.11: (a) Ángulo entre curvas. (b) Representación geométrica de $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

Se quiere construir un modelo que lleve información de la geometría de la superficie ec.(3.35), supongamos que se suma una segunda curva sobre la superficie a través del vector tangente el cual esta ligado a la curvatura y por ende se introduce algo que se conoce como *segunda forma fundamental*.

3.5. Segunda Forma fundamental (Teorema de Meusnier).

La geometría de las superficies depende de dos ecuaciones diferenciales cuadráticas, una de ellas ya fue mencionada, la cual representa ds^2 . La *segunda forma fundamental* puede ser obtenida tomando sobre la superficie una curva C que pasa a través de un punto P , y considerando la curvatura de C en P , este vector de curvatura \vec{k} es igual a $\frac{d\hat{t}}{ds}$. Descomponiendo \vec{k} en \vec{k}_n (**normal**) y \vec{k}_g (**tangencial**) a la superficie respectivamente. Ver Fig.((3.12)(a))

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \vec{k} = \vec{k}_n + \vec{k}_g. \quad (3.42)$$

El vector \vec{k}_n es conocido como *vector de curvatura normal* el cual puede ser expresado en términos de un vector normal unitario a la superficie

$$\vec{k}_n = \kappa_n \hat{N} = \kappa_n \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}. \quad (3.43)$$

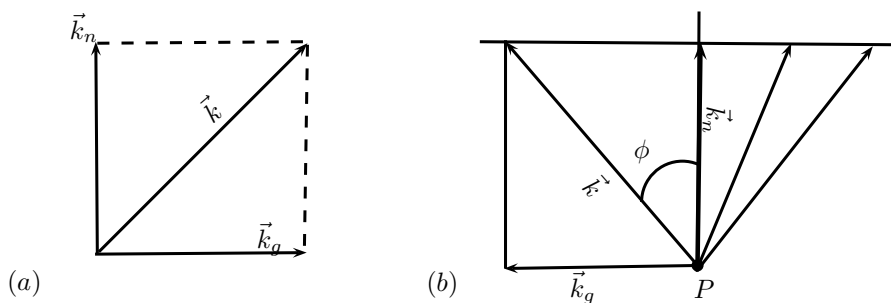


Figura 3.12: (a) Descomposición del vector \vec{k} . (b).

Donde κ_n es la curvatura normal, el vector \vec{k}_n es determinado sólo por C (no por la dirección de \hat{t} o \hat{N}), el escalar κ_n depende del signo de la dirección de \hat{N} . El vector \vec{k}_g es llamado *vector tangencial de curvatura* o *vector de curvatura geodésica*. Sabemos que los vectores \hat{t} y \hat{N} son ortogonales, es decir, $\hat{N} \cdot \hat{t} = 0$, diferenciando esta expresión se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{t}}{ds} \cdot \hat{N} &= -\hat{t} \cdot \frac{d\hat{N}}{ds} = -\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d\hat{N}}{ds} \\ \implies \kappa_n &= -\frac{d\vec{r} \cdot \hat{N}}{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

además ya sabíamos qué estructura tiene $d\vec{r}$ y ahora introduciendo $d\hat{N} = \hat{N}_u du + \hat{N}_v dv$, sustituyendo ambas expresiones en ec.(3.44) se llega a

$$\begin{aligned} \kappa_n &= -\frac{(\vec{r}_u \cdot \hat{N})du^2 + (\vec{r}_u \cdot d\hat{N}_v + \vec{r}_v \cdot \hat{N}_u)dudv + (\vec{r}_v \cdot \hat{N}_v)dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \\ &= \frac{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

con

$$e = -\vec{r}_u \cdot \hat{N}_u, \quad 2f = -(\vec{r}_u \cdot \hat{N}_v + \vec{r}_v \cdot \hat{N}_u), \quad g = -\vec{r}_v \cdot \hat{N}_v, \quad (3.46)$$

los coeficientes e , f y g son funciones de (u, v) , las cuales dependen de las segundas derivadas de \vec{r} con respecto a (u, v) . Por otro lado los coeficientes E , F y G también son funciones de (u, v) , sólo que estas dependen de la primera derivada de \vec{r} . Es obvio que el escalar κ_n tiene una dependencia de

las dos formas fundamentales, en resumen

$$\begin{aligned}
 I &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}, \quad (\text{primera forma fundamental}). \\
 II &= edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = -d\vec{r} \cdot d\vec{N}, \quad (\text{segunda forma fundamental}).
 \end{aligned}$$

Debemos notar de la (Fig.(3.11)(b)) que $\hat{N} \cdot \vec{r}_u = 0$ y $\hat{N} \cdot \vec{r}_v = 0$, adicionalmente e , f y g pueden reescribirse como

$$e = \vec{r}_{uu} \cdot \hat{N}, \quad f = \vec{r}_{uv} \cdot \hat{N}, \quad g = \vec{r}_{vv} \cdot \hat{N}, \quad \text{donde,} \quad (3.47)$$

$$\hat{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EF - F^2}}, \quad (3.48)$$

sustituyendo ec.(3.48) en ec.(3.47) se encuentran los coeficientes e , f y g

$$e = \frac{[\vec{r}_{uu} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (3.49a)$$

$$f = \frac{[\vec{r}_{uv} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (3.49b)$$

$$g = \frac{[\vec{r}_{vv} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)]}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (3.49c)$$

Este conjunto de ecuaciones permiten el cálculo directo de e , f y g , cuando la ecuación de la superficie es dada.

Regresando a la ec.(3.44) o la cual es equivalente a ec.(3.45), vemos que el lado derecho depende de u , v y $\frac{dv}{du}$. Los coeficientes e , f , g , E , F y G son constantes en P , así que \vec{k}_n es completamente determinado en P por la dirección de $\frac{du}{dv}$. Todas las curvas a través de P , tangentes a las mismas direcciones tienen por lo tanto la misma curva normal (\hat{N} es el mismo para todas las curvas). Expresado en lenguaje vectorial. Ver Fig.((3.12)(b)).

Cuando momentáneamente damos a \hat{N} en la dirección de \vec{k}_n y para \hat{n} en la dirección de $\frac{d\vec{t}}{ds}$, entonces se puede expresar este teorema por medio de la ec.(3.44) como

$$\kappa \cos \phi = \kappa_n, \quad (3.50)$$

donde ($0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$) es el ángulo entre \hat{N} y \hat{n} . Esta ecuación puede cambiar de forma para la dirección de \hat{t} en la cual $\vec{k}_n \neq 0$, por lo tanto $\vec{k} \neq 0$. Tales direcciones son llamadas *direcciones no asintóticas* denotadas como $R = k^{-1}$

y $R_n = k_n^{-1}$, dichas cantidades se definen positivas, R_n representa el radio de curvatura de una curva con tangente \hat{t} y $\phi = 0$. Una de tales curvas es la intersección de la superficie con un plano en el punto P a través de \hat{t} y la superficie normal; esta curva es llamada la sección normal de la superficie en el punto P en la dirección de C , esto lo podemos reescribir a través de lo que se conoce como *sección normal*. Se llama sección normal a la superficie S en la dirección del vector tangente \hat{t} en un punto P de la misma a la intersección de la superficie con el plano definido por P y los vectores \hat{N} y \hat{t} . Ver Fig.((3.13)(a)).

Teorema.- *El vector de curvatura de la curva definida por la sección normal de una superficie en un punto P tienen la dirección del vector \hat{N} .*

En efecto; pues $\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa\hat{n}$ (formula de Frenet-Serret) y teniendo en cuenta que el vector normal \hat{n} a la curva de la sección normal coincide con el vector \hat{N} normal a la superficie en el punto P . así que reescribiendo la ec.(3.50)

$$R_n \cos \phi = R, \tag{3.51}$$

con lo anterior podemos redefinir nuevamente el teorema de Meusnier.

Si llamamos C_c al centro de curvatura de una curva C en una dirección no asintótica que pasa por P (no existe singularidad) y llamamos a C_{cn} el centro de curvatura de la sección normal por el punto P en la misma dirección, se tiene que C_c es la proyección sobre la normal de C en C_{cn} . Ver Fig.((3.13)(b)).

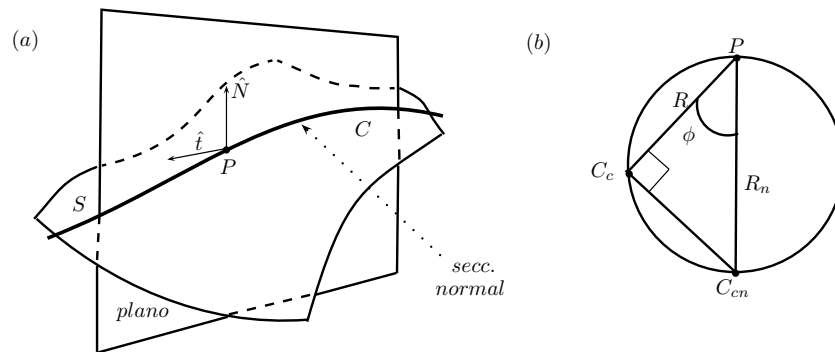


Figura 3.13: (a) Sección Normal. (b) Representación geométrica del teorema de Meusnier.

Las dos últimas versiones del teorema de Meusnier no se mantiene para direcciones en las cuales $II = 0$, implicándose $\kappa_n = 0$. Se aprecia que para

$I = 0$ no existe una dirección real, sin embargo debe pasar que hay direcciones reales para la cual $II = 0$, es decir

$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = 0, \quad (3.52)$$

lo anterior, se puede interpretar que existe una línea recta sobre la superficie y se denominan como *curvas asintóticas*, estas indican que en la sección normal viven *puntos de inflexión*. Ahora vamos a investigar el comportamiento del vector de curvatura normal cuando la dirección tangente en P varia. Su dirección es siempre normal a la superficie, pero su longitud debe variar para diferentes direcciones. Esto se puede sintetizar a través de el *teorema de Euler*.

Si $I > 0$ el signo de κ depende exclusivamente de II , que se puede llevar a una forma cuadrática tal que

$$e + g \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + 2f \left(\frac{dv}{du} \right) = 0, \quad \text{si } z = \frac{dv}{du},$$

cuya solución

$$z = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - ge}}{g}, \quad (3.53)$$

podemos inferir el comportamiento de esta ecuación cuadrática analizando el discriminante $f^2 - ge$, de tal forma que se presentan tres posibles resultados.

- II mantiene el mismo signo, cualquiera que sea la dirección, en este caso II define una forma cuadrática y la condición es

$$f^2 - ge < 0,$$

los centros de curvatura de la sección normal todos están del mismo lado de la superficie normal; las secciones normales son todas cóncavas o convexas. El punto es llamado un *punto elíptico* de la superficie, un ejemplo es cualquier punto sobre un elipsoide.

- • II tiene la forma

$$f^2 - ge = 0,$$

la superficie se comporta en el punto como un *punto elíptico*, excepto en la dirección donde $k_n = 0$; la curva en esta dirección tiene un punto de inflexión y es llamado *parabólico*, un ejemplo es cualquier punto sobre un cilindro.

••• II no mantiene el mismo signo en todas las direcciones $\frac{du}{dv}$ y en este caso es *no se define* una forma cuadrática; la condición es

$$f^2 - ge > 0,$$

la sección normal es cóncava cuando son cortadas por planos que se encuentran en una sección del plano tangente, convexa cuando están fuera de su sección. Las secciones están separadas por la dirección en la cual $k_n = 0$, las direcciones asintóticas. (Ver ec.(3.52) y Fig.(3.14)). El punto es llamado *hiperbólico (punto silla)*, un ejemplo es cualquier punto sobre un paraboloides hiperbólico

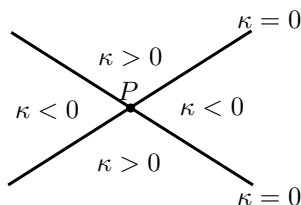


Figura 3.14: Direcciones asintóticas.

Reescribiendo la ec.(3.45) en términos de una nueva variable $\lambda = \frac{dv}{du}$

$$\kappa(\lambda) = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}, \quad (3.54)$$

aplicando la condición de extremal $\frac{d\kappa}{d\lambda} = 0$, se encuentra

$$(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(f + g\lambda) - (e + 2f\lambda + g\lambda^2)(F + G\lambda) = 0, \quad (3.55)$$

$$= \lambda^2(Fg - Gf) + \lambda(Eg - Ge) + (Ef - Fe) = 0, \quad (3.56)$$

de la ec.(3.55) podemos determinar

$$\kappa = \frac{II}{I} = \frac{e + f\lambda}{E + F\lambda} = \frac{f + g\lambda}{F + G\lambda}, \quad (3.57)$$

observe que

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{f + g\lambda}{F + G\lambda} \implies \kappa(F + G\lambda) = f + g\lambda \\ \implies 0 &= (f - \kappa F)du + (g - \kappa G)dv, \end{aligned} \quad (3.58)$$

de forma similar se encuentra

$$(e - \kappa E)du + (f - \kappa F)dv = 0. \quad (3.59)$$

Por otro lado, resolviendo ec.(3.56)

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{(Ge - Eg) \pm \sqrt{(Eg - Ge)^2 - 4(Fg - Gf)(Ef - Fe)}}{2(Fg - Gf)}, \quad (3.60)$$

en la cual κ obtiene un valor extremo, a menos que II se cancele o que II y I sean proporcionales. Un valor debe ser máximo (λ_1), el otro es mínimo (λ_2). Estas direcciones son llamadas *direcciones de curvatura principal* o *direcciones de curvatura*. Ahora necesitamos construir las siguientes expresiones

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{Ef - Fe}{Fg - Gf} = \frac{Fe - Ef}{Gf - Fg}, \quad (3.61a)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{Ge - Eg}{Fg - Gf} = \frac{Eg - Ge}{Gf - Fg}, \quad (3.61b)$$

el problema es geometrizar lo anterior, es decir, dar una interpretación geométrica utilizando la primera forma fundamental ($ds^2 = d\vec{r} \cdot \delta\vec{r}$), entonces

$$E + F \left(\frac{\delta v}{\delta u} + \frac{dv}{du} \right) + G \left(\frac{dv}{du} \frac{\delta v}{\delta u} \right) = 0, \quad (3.62)$$

si $\lambda_1 = \frac{\delta v}{\delta u}$ y $\lambda_2 = \frac{dv}{du}$ la ec.(3.62) adquiere la forma $G(\lambda_1 \lambda_2) + F(\lambda_1 + \lambda_2) + E$. Sustituyendo $(\lambda_1 \lambda_2)$ y $(\lambda_1 + \lambda_2)$ en

$$\begin{aligned} & G(\lambda_1 \lambda_2) + F(\lambda_1 + \lambda_2) + E, \\ &= G \left(\frac{Ef - Fe}{Fg - Gf} \right) + F \left(\frac{Ge - Eg}{Fg - Gf} \right) + E, \\ &= \frac{1}{Fg - Gf} (G(Ef - Fe) + F(Ge - Eg) + E(Fg - Gf)) = 0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

las ecs.(3.62) y (3.63) son equivalentes, es decir, tienen la misma estructura de la primera forma fundamental, además ya sabíamos que cuando es igual a cero, la interpretación que adquiere es que *las direcciones de curvatura son ortogonales*, esto se mantiene para el caso en el que $(Fg - Gf) = 0$.

Integrando la ec.(3.56) nos da las líneas de curvatura sobre la superficie, las cuales forman dos conjuntos de curvas que se interceptan en ángulos rectos y/o generan una *familia de curvas ortogonales* sobre la superficie. Del teorema de la existencia de ecuaciones diferenciales ordinarias podemos concluir que estas curvas cubren la superficie de forma sencilla y sin huecos en la vecindad de cada punto, donde los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental son continuos, excepto en los puntos donde estos coeficientes son proporcionales y los llamamos *puntos umbilicos*.

Siguiendo con el análisis, cuando las *líneas paramétricas* son *líneas de curvatura*, se exige que $F = 0$ junto con $f = 0$, entonces podemos elegir una dirección en particular de curvatura. Véase ec.(3.58) y (3.59), en donde

- $du = 0$ ($dv \neq 0$), obtenemos

$$\frac{g}{G} = \kappa_1, \quad (3.64)$$

- • $dv = 0$ ($du \neq 0$), obtenemos

$$\frac{e}{E} = \kappa_2. \quad (3.65)$$

Note que la ec.(3.45) adquiere una nueva forma (con las condiciones dadas anteriormente) tal que

$$\kappa = \frac{edu^2 + gdv^2}{Edu^2 + Gdv^2} = e \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + g \left(\frac{dv}{ds} \right)^2, \quad (3.66)$$

donde

$$|d\vec{r}| = \sqrt{Edu^2 + Gdv^2} \quad \text{y} \quad |\delta\vec{r}| = \sqrt{E\delta u^2 + G\delta v^2}.$$

Ahora definamos las siguientes expresiones

$$\cos \alpha = \frac{d\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{|d\vec{r}| |\delta\vec{r}|}, \quad (3.67a)$$

$$\sin \alpha = \frac{|d\vec{r} \times \delta\vec{r}|}{|d\vec{r}| |\delta\vec{r}|}, \quad (3.67b)$$

donde $d\vec{r}$ y $\delta\vec{r}$ fueron definidos en ec.(3.40), además

$$|d\vec{r} \times \delta\vec{r}| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = \sqrt{EG} du dv. \quad (3.68)$$

Por último, considerando a $\delta v = 0$, podemos hallar las ecs.(3.67)(a) y (b) como

$$\cos \alpha = \sqrt{E} \frac{du}{ds}, \quad (3.69a)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{G} \frac{dv}{ds}, \quad (3.69b)$$

sustituyendo las expresiones anteriores en ec.(3.66) y utilizando las ecs.(3.69) obtenemos

$$\kappa = \kappa_2 \cos^2 \alpha + \kappa_1 \sin^2 \alpha, \quad (3.70)$$

podemos inferir de la ec.(3.70) que si κ_1 y κ_2 tienen el mismo signo forman superficies elípticas y si son de signos contrarios forman superficies hiperbólicas, además de expresar la curvatura normal en una dirección arbitraria, la cual es conocida como el *teorema de Euler*, junto con la formula de *Meusnier* proporcionan la información completa sobre la curvatura de cualquier curva a través de un punto P sobre la superficie.

Los previos análisis pueden ser transferidos al contexto óptico, la superficie óptica es generada por un cambio en la función de fase, la región hiperbólica tiene asociada dos asíntotas, cuando estas llegan a ser paralelas generan una región parabólica la cual corresponde a la región de *Fraunhofer* y la superficie representa un solo valor para la curvatura. De la ec.(3.53) se obtiene

$$z = \frac{-f}{g}. \quad (3.71)$$

Las propiedades de los vectores \vec{r}_u y \vec{r}_v llegan a ser paralelos describiendo la evolución espacial del campo difractado, permitiéndonos describir efectos de bifurcación.

Sobre regiones parabólicas se encuentra que

$$f^2 - gf = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial v} \right)^2 - \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = 0. \quad (3.72)$$

Hay que señalar que la ecuación anterior corresponde al valor nulo del determinante del Hessiano en la teoría de la catástrofe, ya que las regiones parabólicas corresponden a las singularidades de las superficies ópticas. La implementación de la ecuación anterior en la integral de difracción clásica es

fácil demostrar que los factores cuadráticos desaparecen lo que corresponde a la difracción de Fraunhofer, teniendo en cuenta que las regiones parabólicas son las regiones de organización para el campo óptico. Los siguientes comentarios refuerzan esta afirmación. En la región hiperbólica (el determinante de Hessiano es diferente de cero y la teoría de catástrofe no es adecuada para ser aplicada) la forma cuadrática ec.(3.52) presenta dos regiones limitadas por sus asíntotas que separa las regiones de curvatura con signos diferentes. El caso elíptico no tiene direcciones asintóticas porque tiene valores complejos por lo tanto el significado geométrico es que la curvatura normal no cambia de signo, en consecuencia, la superficie de esta región es siempre convexa o cóncava.

CAPÍTULO 4

Descripción de la ecuación de Burgers.

En capítulos previos hemos introducido conceptos como: curvas características (estas describen las regiones focales a través de una relación funcional en la fase las cuales tiene un comportamiento extremal), superficies (estas pueden ser caracterizadas por una curva en términos de su curvatura por medio de los teoremas de Meusnier y Euler). En este capítulo introduciremos algo que se conoce como *condición inicial* o *condición de frontera*. Es natural que surja la siguiente pregunta ¿ Qué tipo de problemas requieren una o algunas condiciones iniciales? la respuesta es cualquier problema que se modele por medio de una ecuación diferencial ya sea ordinaria o parcial.

Como premisa asumiremos que todo el contexto anterior se puede ligar a ecuaciones diferenciales, estas generalmente son separadas en dos categorías. Las **EDO** Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y las **EDP** Ecuaciones Diferenciales Parciales, todas ellas pueden ser lineales o no lineales, homogéneas o no homogéneas. Aquí se discutirá un pequeño subconjunto de las EDP de primer orden, en especial alguna que contenga un tipo de no linealidad (*ecuación de Burgers*), dichas ecuaciones pueden ser reducidas a ecuaciones diferenciales ordinarias (*ecuaciones características*).

En el capítulo *IV* realizaremos una descripción de las EDP de primer orden a través del método de características aplicando condiciones iniciales o condiciones de Cauchy, notando que algunas de estas generan alguna discontinuidad o algún efecto de morfogenesis. El método de características es

limitado ya que en algunas ocasiones la curva solución resulta ser nuevamente una característica, entonces surge la necesidad de proponer una curva solución en forma paramétrica, en términos matemáticos, significa que se introduce una transformación $J(s, t)$ (Jacobiano ec.(3.8) $(x, y) \rightarrow (s, t)$). En la sección (4.1) se hace un análisis cuando $J(s, t) = 0$ e inmediatamente nos lleva a citar un teorema importante sobre las singularidades. Por otro lado que pasaría si nuestra condición de frontera o condición inicial genera una curva continua de singularidades, el método de características ya no sería aplicable y por esta razón debemos incorporar un nuevo modelo.

Un modelo podría ser la ecuación de Burgers la cual describe dicha curva a la que definiremos como *choque*, esta curva es debido al análisis de algún efecto de morfogénesis ya que a un tiempo t la curva solución es multi-valuada, es decir, la solución deja de ser única, dicha situación se puede estudiar por medio de reescribir la ecuación de Burgers en forma de divergencia que esta a su vez puede reescribirse en una forma más fundamental a la que llamaremos *ecuación de balance*.

4.1. Las EDP de primer orden.

Se denomina ecuación lineal no homogénea o ecuación cuasilineal de primer orden en derivadas parciales a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + \\ X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z), \end{aligned} \quad (4.1)$$

esta ecuación es lineal con respecto a las derivadas, pero puede ser no lineal con respecto a la función desconocida z . Si el segundo miembro es idénticamente nulo y los coeficientes X_i no dependen de z , la ec.(4.1) se llama *lineal homogénea* y se define como

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + \\ X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para mayor claridad en la interpretación geométrica, estudiemos primero la ecuación cuasilineal con dos variables independientes

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \quad (4.3)$$

asumiremos que las funciones P , Q y R son continuas en la región o vecindad considerada de variación de las variables y que no se anulan simultáneamente. Por otro lado consideremos algún campo vectorial continuo

$$\vec{F} = P(x, y, z)\hat{e}_1 + Q(x, y, z)\hat{e}_2 + R(x, y, z)\hat{e}_3, \quad (4.4)$$

donde \hat{e}_1 , \hat{e}_2 y \hat{e}_3 forman la base canónica de R^3 . Note que la ec.(4.3) y la expresión (4.4) comparten información a través de las funciones P , Q y R .

Las líneas vectoriales de este campo descritas por las funciones mencionadas anteriormente, es decir, las líneas cuyas tangentes tiene en cada punto una dirección que coincide con la del vector \vec{F} se determinan de la condición de paralelismo entre el vector $d\vec{t} = dx \hat{e}_1 + dy \hat{e}_2 + dz \hat{e}_3$, ec.(4.5), dirigido por la tangente a las líneas buscadas y el vector \vec{F} del campo, dicho de otra forma, primero se tiene un campo vectorial arbitrario (Fig.(4.1(a))), posteriormente se elige una curva asociada al campo, esta curva contiene una infinidad de líneas tangentes, sólo se tomara a aquella que tiene la misma dirección del campo (Fig.(4.1(b))), esta premisa finalmente nos lleva a definir la condición de paralelismo (Fig.(4.1(c)))

$$\begin{aligned} d\vec{t} \parallel \vec{F} &\iff d\vec{t} = k\vec{F}, && \text{definición de característica} \\ &\implies \frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

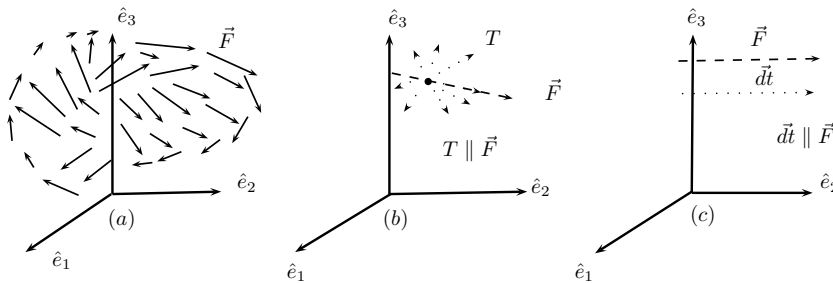


Figura 4.1: (a) Campo vectorial \vec{F} arbitrario. (b) Caracterización de una línea del campo \vec{F} . (c) Condición de paralelismo.

Las superficies formadas por las líneas vectoriales o dicho de otra forma, las superficies que contienen enteramente a las líneas vectoriales que tengan al menos un punto común con esta se llaman *superficies vectoriales*. Ver Fig.(4.2(a)).

Es evidente que las superficies se pueden obtener considerando el conjunto de puntos que pertenecen a una familia monoparamétrica de líneas vectoriales elegidas arbitrariamente, que dependen en forma continua del parámetro (es decir, que son derivables respecto al parámetro). La superficie vectorial se caracteriza por el vector \vec{N} que tiene dirección normal a la superficie, es ortogonal al vector \vec{F} del campo en todo punto de esta. Ver Fig.(4.2(b))

$$\vec{N} \cdot \vec{F} = 0. \quad (4.6)$$

Si la superficie vectorial se determina por la ecuación $z=f(x, y)$, entonces el vector \vec{N} es igual

$$\vec{N} = \frac{\partial z}{\partial x} \hat{e}_1 + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{e}_2 - \hat{e}_3, \quad (4.7)$$

y la condición (4.6) toman la forma de ec.(4.3).

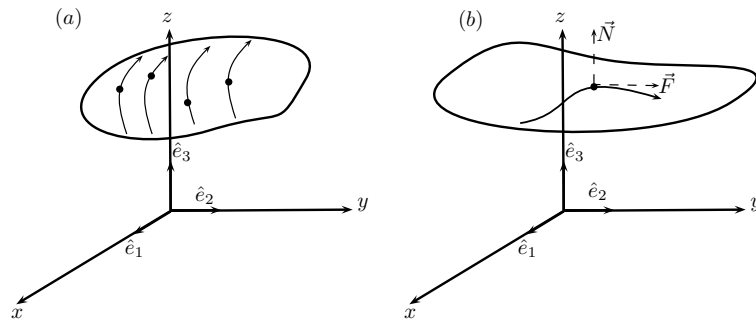


Figura 4.2: (a) Puntos comunes entre la superficie y las líneas vectoriales. (b) Caracterización de la superficie $z = f(x, y)$.

Si la superficie vectorial se da mediante la ecuación $u(x, y, z) = 0$, implica que ahora $\vec{N} = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{e}_3$, entonces la ec.(4.6) toma la forma

$$P(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (4.8)$$

Para hallar las superficies vectoriales hay que integrar las ecs.(4.3) y (4.8), para esto, note que, estas son reducidas a ecuaciones diferenciales ordinarias ec.(4.5). Según se busque las superficies vectoriales de forma implícita o explícita.

Sean $\psi_1(x, y, z) = C_1$ y $\psi_2(x, y, z) = C_2$, llamadas también *líneas características o curvas características* del sistema de ecuaciones (4.5), donde C_1 y C_2 generan una familia de líneas vectoriales o curvas monoparamétricas tangentes a la superficie, estableciendo una dependencia continua para cualquier $\Phi(C_1, C_2) = 0$. Eliminando los parámetros del sistema, obtenemos la ecuación buscada de las superficies vectoriales

$$\Phi [\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)] = 0, \quad (4.9)$$

donde $\Phi(\psi_1, \psi_2)$ es una función arbitraria, es decir, hemos hallado la solución a las ecs.(4.3) y (4.8), cuyas soluciones generan una superficie ya que $z=f(x, y)$, dicha superficie es generada por las curvas características o líneas vectoriales.

Si se exige hallar una curva no arbitraria vectorial del campo ec.(4.4), sino la superficie que pasa por una línea dada, determinada por las expresiones $\Phi_1(x, y, z) = 0$ y $\Phi_2(x, y, z) = 0$, entonces la función Φ de (4.9) ya no será arbitraria por lo que se determinará eliminando las variables x, y y z del sistema de ecuaciones

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0, \quad \psi_1(x, y, z) = 0, \quad \psi_2(x, y, z) = 0,$$

las que deben satisfacerse simultáneamente en los puntos de la línea dada $\Phi_1 = 0$ y $\Phi_2 = 0$, por la cual se trazan las características determinadas mediante las ecuaciones $\psi_1(x, y, z) = C_1$, $\psi_2(x, y, z) = C_2$.

Obsérvese que problema queda indeterminado si la línea dada $\Phi_1 = 0$ y $\Phi_2 = 0$ es nuevamente una característica, ya que en este caso esta curva se puede incluir en diferentes líneas monoparamétricas obteniéndose así diferentes curvas integrales que pasan por dicha línea. El problema puede resolverse si la ecuación de la curva por la cual se exige trazar una superficie integral ec.(4.3) se da en forma paramétrica

$$x_0 = x_0(s), \quad y_0 = y_0(s), \quad z_0 = z_0(s), \quad (4.10)$$

entonces también conviene buscar la solución en forma paramétrica

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad z = z(s, t). \quad (4.11)$$

Introduzcamos un parámetro t en la ec.(4.5) que determina las características, haciendo

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} = dt, \quad (4.12)$$

para que las características pasen por la curva dada, se busca una solución de ec.(4.3) que satisfice en $t = 0$ o $(t = t_0)$ las condiciones iniciales dadas por la ec.(4.10). Para estas condiciones iniciales y s fija, obtenemos una característica que pasa por un punto fijo de la curva (4.10), cuando s varia obtenemos la familia de características ec.(4.11) que pasa por los puntos de la curva dada por ec.(4.10) (en este caso se considera que la curva dada por ec.(4.10) no es característica). El conjunto de puntos que pertenecen a esta familia de características ec.(4.11) forman precisamente la curva integral buscada.

La única dificultad que debe ocurrir en nuestra solución de condiciones iniciales definida por ecs.(4.3) y (4.10) sugieren que la ec.(4.11) sea invertible para expresar a s , t y z como funciones de las variables independientes x e y , es decir, el Jacobiano debe ser diferente de cero

$$J(s, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \neq 0,$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= x_t, & \frac{\partial x}{\partial s} &= x_s, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= y_t, & \frac{\partial y}{\partial s} &= y_s. \end{aligned}$$

Sin embargo, cuando $J = 0$, encontramos

$$\frac{x_t}{y_t} = \frac{x_s}{y_s} = \frac{P(x, y, z)}{Q(x, y, z)}, \quad (4.13)$$

por lo tanto si existe una solución $z = f(x, y)$ de ec.(4.3) a través de una curva ec.(4.10) sobre la cual $J = 0$, encontramos

$$\frac{z_t}{R(x, y, z)} = \frac{z_x x_t + z_y y_t}{P(x, y, z) z_x + Q(x, y, z) z_y} = \frac{y_t}{Q(x, y, z)} = \frac{x_t}{P(x, y, z)}, \quad (4.14)$$

podemos decir que cuando $J = 0$, nuestra ec.(4.3) con condición (4.10) puede ser soluble si ella misma es solución de ec.(4.5), claramente la solución no es única.

Nuevamente mencionamos que cualquier curva solución de ec.(4.5) es llamada curva característica de la ecuación diferencial (4.3). Hemos visto que cada solución de ec.(4.3) consiste de una familia monoparamétrica de características. Estas se pueden arreglar de manera única para que la solución pase a través de una curva prescrita por ec.(4.10) si la condición

$$P(x, y, z)y_t - Q(x, y, z)x_t \neq 0, \quad (4.15)$$

asegurándonos que el Jacobiano diferirá de cero, cuando este requerimiento falla, la curva (4.10) debe ser restringida a coincidir con una característica y entonces existe una infinidad de soluciones con condiciones iniciales (lo anterior significa que deja de ser válido el *principio de unicidad*). En particular si dos soluciones de ec.(4.3) se interceptan en un ángulo, la curva a lo largo de la cual se unen debe ser una característica. Para visualizar esta situación, observe que la característica de ec.(4.3) comprende una familia de curvas que extraen únicamente un punto en el espacio donde las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ son definidas, llevándonos a el siguiente teorema.

Teorema.- *Las singularidades generadas por las condiciones iniciales ec.(4.10) se propagan en el plano $(x - y)$ a lo largo de las curvas características.*

La proyección de estas curvas sobre el plano $(x - y)$ es referido como el *rango de influencia*. Ver Fig.(4.3). Obviamente no todos los problemas requieren de un análisis tan sofisticado, algunos de ellos son muy simples, pero siempre recurriremos a las ecs.(4.5), (4.10) o (4.11).

De este modo la integral de la ec.(4.3), dependiente de una función arbitraria puede obtenerse por el método siguiente: se integra el sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.5) de las cuales se hallan dos integrales independientes $\psi_1(x, y, z) = C_1$ y $\psi_2(x, y, z) = C_2$. Se obtiene la integral buscada en la forma $\Phi[\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)] = 0$, donde Φ es una función arbitraria. La ecuación de la superficie integral que pasa por una línea dada, determinada por las expresiones $\Phi_1(x, y, z) = 0$ y $\Phi_2(x, y, z) = 0$ se puede hallar tomando la función Φ no en forma arbitraria, sino determinada por $\Phi(C_1, C_2)$ por eliminación de x , y y z lo cual nos conduce a la solución buscada $\Phi(C_1, C_2)$ mencionada con anterioridad como la solución a la ec.(4.3). A continuación esbozaremos algunos ejemplos.

- Considere el caso más simple de una ecuación diferencial lineal hiperbóli-

ca de dos variables independientes $(x, y) \rightarrow (x, t)$

$$u_t + cu_x = 0, \quad c = \text{constante real}, \quad (4.16)$$

$$\text{donde } u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

para resolver la ecuación de arriba, seguimos el método descrito con anterioridad.

1.- Integrar el sistema auxiliar, cuya forma tiene

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} &= \frac{dx}{c} = \frac{du}{0}, \quad \text{esto implica, } du = 0 \implies u = C_2 \implies \\ t &= \frac{x}{c} = C_1 \implies t - \frac{x}{c} = C_1, \iff C_1' = x - ct. \end{aligned}$$

2.- Obtención de la integral buscada $\Phi(C_1', C_2)$, esto se hace mediante la expresión $C_2 = f(C_1')$, implicando $u = f(x - ct)$, hemos hallado la solución, cuyo argumento representa una onda viajera con velocidad constante (cada punto de su perfil se propaga con la misma velocidad).

• • Una extensión de ec.(4.16), es otra ecuación lineal no homogénea

$$u_t + u_x = \alpha u, \quad \alpha = \text{constante real} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{dt}{1} &= \frac{dx}{c} = \frac{du}{\alpha u}, \\ \implies x - ct &= C_1', \quad \alpha t - \text{Ln } u = C_2, \quad \text{si } C_2 = f(C_1'), \\ \implies \alpha t - f(x - ct) &= \text{Ln } u \\ \implies u &= e^{\alpha t} f_0(x - ct), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde $f_0(x - ct) = e^{-f(x-ct)}$, la ec.(4.18) representa una onda en la cual la amplitud. (A) tiende a cero cuando $(\alpha < 0)$. (B) tiende a infinito cuando $(\alpha > 0)$, pero este valor limite es alcanzado asintóticamente en un tiempo infinito (los procesos físicos evolucionan en un tiempo finito).

• • • Por último, consideremos ahora una ecuación lineal en sus derivadas pero no en la función desconocida y no homogénea

$$u_t + cu_x = u^2, \quad \text{y condición inicial } u(x, 0) = u_0(x), \quad (4.19)$$

de la misma forma uno encuentra

$$u = \frac{1}{f(x - ct) - t}, \quad \text{aplicando la condición inicial}$$

$$u_0(x) = \frac{1}{f(x)},$$

$$\iff x' = x - ct \implies f(x - ct) = \frac{1}{u_0(x - ct)},$$

por último se sustituye en u , tal que

$$u = \frac{u_0(x - ct)}{1 - tu_0(x - ct)}. \quad (4.20)$$

Nuevamente la ec.(4.20) representa una onda propagándose con una velocidad constante c . Sin embargo el perfil de la onda ahora se deforma, de tal manera que una amplitud negativa en un punto sobre el pulso inicial decae a cero conforme t tiende a infinito, pero una amplitud positiva de un punto propagándose con velocidad c tiende a infinito en un tiempo finito.

Note que la no linealidad de ec.(4.20), junto con la condición inicial (*condiciones iniciales de Cauchy*) generan este tipo de efectos (deformación del perfil de la onda), más adelante daremos un tratamiento a este tipo de ecuaciones no lineales en especial la ecuación de Burgers. Para finalizar esta sección se hará una observación.

Observación I.- El problema de Cauchy para ec.(4.3) consiste en hallar la solución $z = f(x, y)$ que contenga una curva Γ del espacio o lo que es lo mismo, que tome unos valores dados sobre la curva H del plano $(x - y)$. Ver Fig.(4.3)

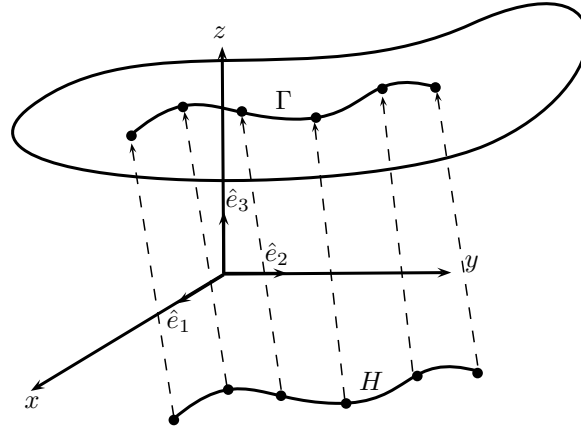


Figura 4.3: Proyección de Γ sobre el plano.

En particular, si H es una recta x o y son iguales a una constante, por ejemplo si se pide $z(x, 0) = f(x)$ sujeta a esta condición inicial. Un problema de Cauchy puede no tener solución única, ya que la solución de la ecuación $Au_y + Bu_x = 0$ es $u(x, y) = \rho[\gamma(x, y)]$ y cada solución toma valores constantes sobre cada $\gamma(x, y) = c$. Si buscamos una solución que contenga una curva Γ cuya proyección H sea una de las características se debe exigir que Γ esté en un plano horizontal $z = c$. Entonces hay infinitas soluciones *una para cada función γ con $\gamma(c) = k$* . Si Γ no tiene z constante, no hay solución que contenga a Γ .

4.2. Ecuación de Burgers.

No hay que olvidar el tema principal de este capítulo el cual es discutir las ecuaciones diferenciales que tienen algún tipo de no linealidad. El más simple y hermoso ejemplo de una ecuación que tiene este tipo de no linealidad llamada *genuinamente no lineal*, es

$$u_t + uu_x = 0, \tag{4.21}$$

cuya solución representa una onda viajera en la cual la velocidad de propagación de un punto sobre el pulso es *igual o proporcional a la amplitud en tal punto*, es llamada *ecuación de Burgers*.

El término genuinamente no lineal fue definido por *P.D Lax* en 1957. Éste se refiere a una propiedad especial de la onda propagada, llamada *velocidad de propagación dependiente de la amplitud*. Además, aparece como un modelo natural a procesos físicos gobernados por una *ley de conservación* en la cual la función de flujo generalmente un campo vectorial se balancea respecto a la función de densidad¹, (Whithan, 1974). Por lo tanto notamos que la ecuación de Burgers modela un sin número de importantes fenómenos físicos.

4.3. Análisis de la ecuación de Burgers.

Matemáticamente la ecuación de Burgers es soluble por diversos métodos (numéricos y analíticos (separación de variables o por características)), pero presenta un pequeño desafío en cuestión a las condiciones iniciales (problema de Cauchy), en esta sección se estudiará la solución a la ecuación de Burgers a través del método de características el cual fue discutido en la sección (4.1) y aplicando las condiciones iniciales notaremos que la solución (onda viajera) adquiere una deformación en el pulso propagado llamado *morfogenesis* (**en el contexto óptico significa que genera nuevas formas asociadas al campo óptico resultante de una transformación o mapeo**) el cual es complicado de analizar por el método de características, ya que para un cierto tiempo t la solución no es única, así que recurriremos a modificar la ecuación de Burgers a una forma de divergencia y por medio de esta se analizará lo que se conoce como *choque de onda*.

De la ec.(4.21) uno puede definir sus características como

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} &= \frac{dx}{u} \implies du = 0 \implies u = C_2, \\ t &= \frac{x}{u} + C_1, \text{ si } C_2 = f(C_1) \implies u = f\left(t - \frac{x}{u}\right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

la ec.(4.22) tiene una singularidad en $u=0$, la interpretación física es que la velocidad en $u=0$ tiene un comportamiento *adiabático* (**es decir, hay un cambio lentamente en el perfil del pulso**).

Considere la ec.(4.22) solución de la ec.(4.21) que satisface la condición

¹ecuación de continuidad en una sola dimensión

inicial

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= e^{-x^2}, \quad x \in \mathbf{R}, \\ \implies u(x, t) &= e^{-(u(t-\frac{x}{u}))^2}, \quad u \text{ tiene una singularidad en } u=0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

la función anterior es válida para $u \neq 0$ ya que sólo forma un punto y no un pulso. Ahora construyamos una simple interpretación geométrica de un pulso dado por la condición inicial, el perfil de la solución a cualquier tiempo t es obtenido trasladando un punto P sobre el pulso, ec.(4.23) en la dirección x positiva, siendo la magnitud de la traslación igual a t veces la amplitud del pulso en el punto P . Ver (Fig.(4.4)), es decir

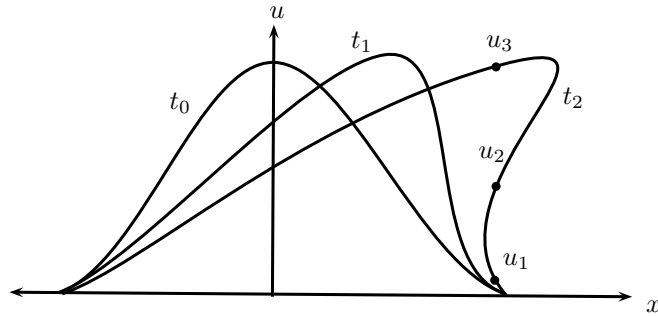


Figura 4.4: Deformación del pulso conforme t se incrementa.

- Cada punto arbitrario sobre el pulso se mueven con diferente velocidad, el pulso ahora se deforma.
- • Existe un tiempo crítico, t_c , en el cual el pulso tiene una pendiente vertical, esto significa que en t_c dicha pendiente corta el perfil en más de una vez, dicho de otro modo, que para un t_c este asocia diferentes valores de u .
- • • Para un $t > t_c$ el perfil de la función ya no tiene una interpretación física, por ejemplo, si u representa la presión de un fluido, allí no puede haber más de un valor, es decir, un punto del fluido no puede tener asociado diferentes valores de presión.

Esto ha sido observado en la naturaleza, que una discontinuidad en movimiento aparezca en la cantidad u inmediatamente después de un t_c . Esta discontinuidad en un punto $x = X(t)$ es llamada *choque*, el cual definiremos formalmente más adelante, cuando un choque aparece en la solución, se ajusta en la parte multi-valuada de la solución tal que corta los lóbulos de áreas

en dos proporciones. Ver Fig.(4.5), esto pasa en cualquier $t > t_c$ y hace que la solución sea uni-valuada.

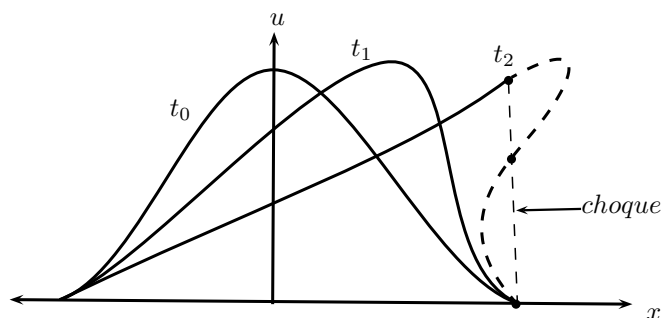


Figura 4.5: Representación del choque por la línea recta.

La proporción en la cual los lóbulos son cortados depende de una propiedad primitiva (conservación de una densidad) de algunos fenómenos físicos representados por la ec.(4.21). Cuando la propiedad primitiva es una conservación de densidad $\rho(u) = u$, el choque corta los lóbulos en áreas iguales.

4.4. Existencia de una solución genuina.

Un gran número de fenómenos físicos son modelados por medio de ecuaciones diferenciales, en donde suponemos que las variables describen a un estado físico y son bien comportadas en una vecindad. Sin embargo, existen otras situaciones cuando no lo son, este hecho es reflejado en ciertas condiciones iniciales, es decir, problemas asociados a ecuaciones con soluciones *suaves o bien comportadas* (también llamadas *soluciones genuinas*) no existen ni siquiera localmente o la solución deja de ser suave después de algún tiempo crítico t_c incluso si los valores iniciales y límites están bien definidos. La ecuación de Burgers es un ejemplo para la cual una solución con un cierto tipo de condiciones iniciales siempre desarrolla una singularidad en un tiempo finito.

Como se ha mencionado anteriormente, un problema de condiciones iniciales o de Cauchy para la ecuación de Burgers consiste en encontrar una solución de la forma $u(x,t)/(x,t) \in R \times R_+$, que satisfaga la condición $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in R$, donde R es un conjunto de números reales y $R_+ = (0, \infty)$.

Definición.- Una solución genuina (o clásica) de la ecuación diferencial parcial (4.21) en un dominio D sobre plano $(x - t)$ es una función $u(x, t) \in C^1(D)$, la cual satisface (4.21).

Una condición suficiente para la existencia de una solución genuina local de ec.(4.21) y con $u_0(x) \in C^1(\mathbf{R})$ (es decir, una solución es valida si $0 < t < t_c$ con $t_c < \infty$, Jhon (1982), Prasad y Ravindran (1985)). Dicha solución puede obtenerse resolviendo

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} \implies du = 0 \implies u = C_2, \text{ entonces } \frac{du}{dt} = 0, \quad (4.24)$$

y

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} \implies \epsilon = x - ut. \quad (4.25)$$

La ec.(4.24), implica que u es constante a lo largo de la curva característica $\epsilon = x - ut = cte.$, por lo tanto la solución de (4.21) y condición inicial dada por

$$u = u_0(x - ut). \quad (4.26)$$

Citando el teorema de la función implícita, se deduce que (4.26) es una función de clase C^1 siempre y cuando

$$1 + tu'_0(\epsilon) \neq 0, \quad (4.27)$$

la cual satisface $|t| < 1$, donde u_x se define como

$$u_x = \frac{u'_0(\epsilon)}{1 + tu'_0(\epsilon)}. \quad (4.28)$$

Si la condición inicial es tal que $u'_0 < 0$ en algún intervalo del eje- x , entonces existe un tiempo $t_c > 0$ tal que $t \rightarrow t_c^-$, la derivada $u_x(x, t)$ de la solución tiende a $-\infty$ para algunos valores de x y por lo tanto la solución genuina no puede continuar más allá de $t = t_c$, el tiempo critico está dado por

$$t_c = -\frac{1}{\min_{\epsilon \in R}\{u'_0(\epsilon)\}} > 0. \quad (4.29)$$

Si $u'_0(x) > 0$ para todo $x \in R$, la ec.(4.26) da una solución genuina de ec.(4.21) y de $u(x, 0) = u_0(x)$ para todo $t > 0$. Desglosando la solución en $t = t_c$ puede ser explicada no sólo gráficamente como en la sección anterior,

sino también a partir de las curvas características de ec.(4.21). Sea I un intervalo en el eje- x tal que $u'_0(x) < 0$ para $x \in I$, las curvas características en el plano $(x - t)$ parten de los diversos puntos del intervalo I que convergen y en general envuelven una cúspide a partir del tiempo t_c . Considere un dominio en el plano $(x - t)$ el cual está limitado por dos ramas de la cúspide. Por ejemplo, suponga que tres curvas características parten de tres puntos diferentes sobre I que pasan por cualquier punto de este dominio, por lo tanto las características llevan diferentes valores constantes de la solución. Por lo que u no se define exclusivamente en los puntos interiores de este dominio. La dificultad en la continuación de una solución genuina más allá de un tiempo finito t_c es bastante común para un sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales *cuasilineales*. Una solución bien comportada con condiciones iniciales para una ecuación semi-lineal ec.(4.19) también se rompe después de un tiempo finito debido al incremento ilimitado en la amplitud de dicha solución. Sin embargo, el rompimiento de la solución ec.(4.21) se debe a una razón distinta, debido a un aumento en el valor absoluto de las derivadas de primer orden, la solución en si misma permanece finita. Para un sistema hiperbólico de ecuaciones cuasilineales, tal descomposición se debe a una propiedad muy específica de una velocidad característica o de propagación de la onda, que depende esencialmente de la amplitud de las ondas, es decir, el campo característico es *genuinamente no lineal*. Es fácil resolver el problema que determina el tiempo t_c cuando la amplitud de la discontinuidad en las primeras derivadas de la solución tienden a infinito (lo que lleva a la aparición de una discontinuidad en una solución) sobre una curva característica principal definida de forma adecuada de un sistema general hiperbólico en dos variables independientes (Jeffrey(1976)) y el método se puede extender fácilmente a sistemas en más de dos variables independientes.

4.5. Leyes de conservación y condición de salto.

Hemos visto en la última sección que una solución genuina de ec.(4.21) y con condiciones iniciales deja de ser valida después de un tiempo critico t_c . Sin embargo dicha ecuación modela bastantes fenómenos físicos donde la función u llega a ser discontinua después de un t_c y los estados de los fenómenos persisten para todo $t > t_c$.

Por lo tanto debemos generalizar la noción de una solución que permita a u ser no necesariamente de clase C^1 . El orden para escribir a ec.(4.21) en forma de divergencia

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad (x, t) \in R \times R. \quad (4.30)$$

Definición.- Una ley de conservación es una ecuación en forma de divergencia, ec.(4.30), esta sólo describe una ley de conservación.

La anterior definición se puede generalizar tal que

$$\frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n}{n+1} u^{n+1} \right) = 0, \quad n = cte. \quad (4.31)$$

Las ecs.(4.21) y (4.30) son un caso particular de (4.31), esta última se puede reescribir de la siguiente forma

$$\frac{\partial H(u)}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \quad (4.32)$$

donde $H(u)$ está asociada a una densidad (función escalar) y $F(u)$ a un flujo (función vectorial), ambas funciones son suaves o bien comportadas respecto de la variable de estado u . La ec.(4.21) puede ser deducida de (4.32) si

$$H'(u) \equiv \frac{dH}{du} \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{F'(u)}{H'(u)} = u. \quad (4.33)$$

En física una ecuación de balance representa la conservación de algunas cantidades tales como masa, momento cinético, energía, etc. de un sistema físico. La ecuación de balance se establece en términos de integrales, mejor dicho la ec.(4.32) toma la forma

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H(u)}{\partial t} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F(u)}{\partial x} dt, \\ 0 &= H(u(x, t_2)) - H(u(x, t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F(u)}{\partial x} dt, \\ \implies \int_{x_1}^{x_2} [H(u(x, t_2)) - H(u(x, t_1))] dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F(u)}{\partial x} dt \right] dx, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{x_2}^{x_1} \frac{\partial F(u)}{\partial x} dx \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} [F(u(x_1, t)) - F(u(x_2, t))] dt, \end{aligned} \quad (4.34)$$

la cual se mantiene para un intervalo espacial fijo (x_1, x_2) y para cualquier intervalo temporal (t_1, t_2) . Además sigue siendo válida incluso para una función $u(x, t)$ discontinua. Ahora estamos en posición de definir una *solución débil* para la ec.(4.32) por ser $u(x, y)$ una función limitada que satisface ec.(4.34). Note que el lado izquierdo de ec.(4.34) puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [H(u(x, t_2)) - H(u(x, t_1))] dx = \int_{x_1}^{x_2} H(u(x, t)) dx \Big|_{t_1}^{t_2} \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\int_{x_1}^{x_2} H(u(x, t)) dx \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} [F(u(x_1, t)) - F(u(x_2, t))] dt, \\ & \implies \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} H(u(x, t)) dx = F(u(x_1, t)) - F(u(x_2, t)), \end{aligned} \quad (4.35)$$

las ecs.(4.32), (4.34) y (4.35) son equivalentes las cuales asumiremos que son válidas en casi todas las partes de un intervalo $(x_1, x_2, t) \in R^2 \times R_+$. Podemos sintetizar estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema.- *Cada solución débil la cual es de clase C^1 es una solución genuina de la ecuación diferencial parcial.*

$$H'(u)u_t + F'(u)u_x = 0.$$

Considere una función $u(x, t)$ tal que sea solución de ec.(4.35) y sus derivadas parciales sufren una discontinuidad a través de una curva suave aislada $\Omega : x = X(t)$ en el plano $(x - t)$ y es continuamente diferenciable en otras partes, además suponemos que el límite de la función u y su derivada existen cuando nos acercamos a Ω de ambos lados. La función $u(x, t)$ es una solución genuina de ec.(4.21) un en subdominio tanto del lado izquierdo como del lado derecho de la curva Ω y considere que x_1 y x_2 son puntos fijos tal que $x_1 < X(t) < x_2$ para t en un intervalo abierto. Escribiendo

$$\int_{x_1}^{x_2} H(u(x, t)) dx = \int_{x_1}^{X(t)} H(u(x, t)) dx + \int_{X(t)}^{x_2} H(u(x, t)) dx, \quad (4.36)$$

sustituyendo ec.(4.36) en (4.35) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^{x_2} H(u(x, t)) dx \right] &= \frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^{X(t)} H(u(x, t)) dx + \int_{X(t)}^{x_2} H(u(x, t)) dx \right] = \\
 &= \int_{x_1}^{X(t)} \frac{\partial H(u(x, t))}{\partial t} dx + \int_{X(t)}^{x_2} \frac{\partial H(u(x, t))}{\partial t} dx = \\
 &= \int_{x_1}^{X(t)} H' u_t(x, t) dx + \int_{X(t)}^{x_2} H' u_t(x, t) dx + \\
 &= \dot{X}(t) \{ H[u(X(t)^{-0}, t)] - H[u(X(t)^{+0}, t)] \} = F(u(x_1, t)) - F(u(x_2, t)).
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Los dos primeros términos tienden a cero ya que $x_1 \rightarrow X(t)^{-0}$ y $x_2 \rightarrow X(t)^{+0}$. Por lo tanto tomando el punto x_1 por la izquierda muy cercano a $X(t)$ y de la misma forma a x_2 sólo que por el lado derecho de $X(t)$, obtenemos en el límite. (Revisar la definición de continuidad en cualquier texto de matemáticas)

$$\begin{aligned}
 \dot{X}(t) \{ H[u_{\mathcal{L}}(t)] - H[u_{\mathcal{R}}(t)] \} &= F(u_{\mathcal{L}}) - F(u_{\mathcal{R}}) \\
 \implies \dot{X}(t) &= \frac{[F]}{[H]},
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow X(t)^{-0}} u(x, t) &= u_{\mathcal{L}}, \\
 \lim_{x \rightarrow X(t)^{+0}} u(x, t) &= u_{\mathcal{R}},
 \end{aligned}$$

$$[F] = F(u_{\mathcal{L}}) - F(u_{\mathcal{R}}) \quad \text{y} \quad [H] = H(u_{\mathcal{L}}) - H(u_{\mathcal{R}}).$$

La ec.(4.38) nos da la velocidad de propagación de la discontinuidad y los límites de $u_{\mathcal{L}}$ y $u_{\mathcal{R}}$ sobre los dos lados de la discontinuidad es llamada *condición de salto*.

Para una discontinuidad, el salto es diferente de cero, es decir, $u_{\mathcal{L}} \neq u_{\mathcal{R}}$. Por lo tanto las leyes de conservación para las ecs.(4.30) y (4.31), las condiciones de salto ec.(4.32) llegan a ser

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{2}(u_{\mathcal{L}} + u_{\mathcal{R}}), \tag{4.39}$$

y

$$\dot{X}(t) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\sum_{i=0}^n u_{\mathcal{R}}^{n-i} u_{\mathcal{R}}^i}{\sum_{i=0}^{n-1} u_{\mathcal{R}}^{(n-1-i)} u_{\mathcal{R}}^i} \right), \quad (4.40)$$

respectivamente.

4.6. Consideración de estabilidad, condición de entropía y choques.

Vamos a discutir soluciones de una serie de problemas con condiciones iniciales de la ecuación de balance (4.35), donde $H(u) = u$, $F(u) = \frac{1}{2}u^2$, es decir, soluciones débiles de ec.(4.30). Las soluciones no necesitan ser suaves por ahora. En primer lugar consideramos

$$u(x, 0) = 0, \quad (\equiv \rho_1(x)), \quad (4.41)$$

una solución obvia con condición inicial es

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in R \times R_+, \quad (4.42)$$

la cual es solución genuina de ec.(4.21), considere la función

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2}t, \\ -1 & \text{si } -\frac{1}{2}t < x \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{2}t, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2}t < x. \end{cases} \quad (4.43)$$

Note que u tiene valores de $\{-1, 0, 1\}$, sus curvas características podemos obtenerlas mediante el análisis de ec.(4.22). Se había encontrado que $u = C_2$ y $t = \frac{x}{u} + C_1$, entonces

- $u = 0$, si llamamos a $m = \frac{1}{u}$ e $y = t$, la expresión de arriba adquiere una estructura tipo *ecuación de la recta*, entonces podemos pensar en la situación cuando $u \rightarrow 0 \implies t \rightarrow \infty$, esto significa que $m \rightarrow \infty$. Ver Fig.(4.6).

- • $u = -1$, implica que $m < 0$. Fig.(4.6).
- • • $u = 1$, implica que $m > 0$. Fig.(4.6).

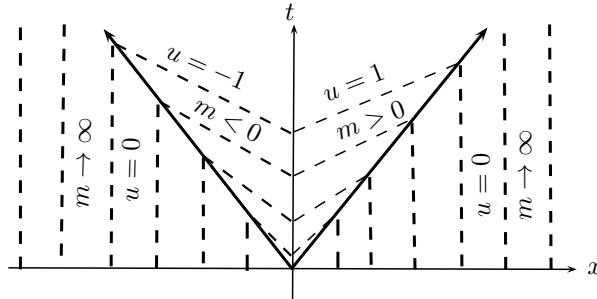


Figura 4.6: Curvas características de la función $u = u(x, t)$.

La ec.(4.43) es constante y por lo tanto una solución genuina en cada uno de los subdominios de la mitad superior del plano $(x - t)$ el cual está dividido por dos líneas rectas que contiene los siguientes puntos $x = 0$, $x = \frac{-1}{2}t$ y $x = \frac{1}{2}t$.

Note que ec.(4.43) satisface la condición de salto ec.(4.39) ya que u toma valores diferentes en cada subdominio a lo largo de las dos líneas rectas y por lo tanto se calculan como

- $\dot{X}_1(t) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$.
- • $\dot{X}_2(t) = \frac{1}{2}(0 + (-1)) = -\frac{1}{2}$.

Este es un resultado espectacular de una solución no nula que surge de una condición inicial cero y es debido al hecho de que la discontinuidad a lo largo de la recta $x = 0$ no es admisible, lo cual explicaremos más adelante. Obsérvese que incluso si el valor de una función que satisface ec.(4.34) cambia en un conjunto de puntos móviles $x_i(t)$ finitos en número (o de medida cero) en el plano $(x - t)$, la nueva función seguirá satisfaciendo ec.(4.34). Por lo tanto, no importa si tomamos la solución débil de ec.(4.30) como continua a la izquierda (como en el caso (4.43)) o a la derecha del punto de discontinuidad.

En general, una solución discontinua con condiciones iniciales aplicadas a ec.(4.35), es decir, una solución débil de la ley de conservación ec.(4.30), no es única. Lo que se necesita ahora es un principio matemático que caracterice una clase de soluciones permisibles en la que cada condición inicial asociada a la ley de conservación tenga solución única. Podemos deducir tal principio de las siguientes consideración. Una solución genuina que satisface las condiciones iniciales suaves o bien comportadas es única.

Por lo tanto, una discontinuidad sólo es permisible si impide la intersección de las características que provienen de los puntos de la línea inicial en los dos lados de la misma, es decir

$$u_{\mathcal{R}}(t) < \dot{X}(t) < u_{\mathcal{L}}(t), \quad (4.44)$$

el criterio matemático ec.(4.44) es conocido como la *condición de entropía de Lax*, para las discontinuidades admisibles puede reducirse de la siguiente consideración de estabilidad (mostrada por primera vez por Gel'fand en 1962 y definida por Jeffrey² (1976)).

Definición.- Una discontinuidad admisible que satisface la condición de entropía ec.(4.44) se llama choque.

Como aplicación inmediata usaremos la ec.(4.39) y encontramos que para la ley de conservación ec.(4.30) la condición de estabilidad ec.(4.44) es equivalente a

$$\begin{aligned} u_{\mathcal{R}}(t) < \dot{X}(t) < u_{\mathcal{L}}(t) &= u_{\mathcal{R}}(t) < \frac{1}{2}(u_{\mathcal{R}}(t) + u_{\mathcal{L}}(t)) < u_{\mathcal{L}}(t) \\ &= 2u_{\mathcal{R}}(t) < u_{\mathcal{R}}(t) + u_{\mathcal{L}}(t) < 2u_{\mathcal{L}}(t) \\ &= u_{\mathcal{R}}(t) < u_{\mathcal{L}}(t) < 2u_{\mathcal{L}}(t) - u_{\mathcal{R}}(t) \\ &\implies u_{\mathcal{R}}(t) < u_{\mathcal{L}}(t). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Siguiendo el contexto, la condición de estabilidad ec.(4.44) también es llamada *condición de entropía*. Observemos dos importantes resultados con respecto a problemas que contienen alguna no linealidad.

- En contraste con los resultados de las ecuaciones lineales, no sólo puede aparecer una discontinuidad en la solución de ecuaciones no lineales con condiciones iniciales, sino también una discontinuidad en ellas mismas.

- • Los procesos físicos descritos por soluciones continuas de un sistema hiperbólico de ecuaciones cuasilineales son reversibles en el tiempo, es decir, si conocemos la solución en algún momento, podemos usar la ecuación diferencial para obtener la solución única en el pasado, así como en futuro. Sin embargo, si un proceso es descrito por una solución discontinua (donde las discontinuidades son choques) de un sistema de ecuaciones de equilibrio, entonces es irreversible.

²Una discontinuidad es admisible cuando las pequeñas ondas de amplitud inciden sobre la discontinuidad, las perturbaciones resultantes en la velocidad de la discontinuidad y las ondas resultantes que se alejan de la discontinuidad se determinan de manera única y permanecen pequeñas.

Para finalizar este capítulo, definiremos nuevamente el concepto de entropía desde el punto de vista óptico.

Entropía.- *Es el proceso físico asociado a una discontinuidad en alguna propiedad del campo óptico u otro tipo de campo.* Ver (Fig.(4.7)(a)).

Por ejemplo, consideremos dos medios en contacto, 1 y 2. Ver (Fig.(4.7)(b)). Supondremos que hay una densidad superficial de carga externa, σ , que puede variar de un punto a otro en la zona interfacial. Construyamos ahora una pequeña superficie S en forma de caja de pastillas, que corta a la zona interfacial y encierra una área ΔS de dicha zona, siendo la altura de la caja de pastilla despreciablemente pequeña comparada con el diámetro de las bases. La carga encerrada por S es

$$\sigma \Delta S + \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \text{ Volumen}, \quad (4.46)$$

pero el volumen de la caja de pastilla es despreciablemente pequeño de modo que el último término puede despreciarse. Aplicando la ley de Gauss a S , vemos que

$$\begin{aligned} \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \Delta S + \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 \Delta S &= \sigma \Delta S, \quad \text{si } \vec{n}_1 = -\vec{n}_2, \\ \implies (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_2 &= \sigma, \end{aligned} \quad (4.47)$$

puesto que \vec{n}_2 puede servir como la normal a la zona interfacial

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (4.48)$$

Así pues, la discontinuidad en la componente normal de D está dada por la densidad superficial de carga externa sobre la zona interfacial entre dos medios, la componente de D es continua.

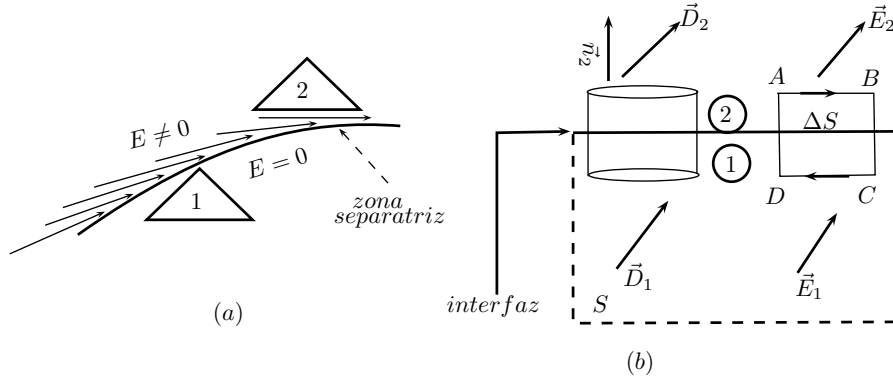


Figura 4.7: (a) Zona separatriz. (b) Las condiciones en la frontera para los vectores de campo en la zona interfacial entre dos medios puede obtenerse aplicando la ley de Gauss a S e integrando $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ a lo largo de la trayectoria $ABCD$.

Debido a que el campo electrostático puede definirse como menos el gradiente de alguna función escalar ($\vec{E} = -\nabla\phi$), la integral de línea de $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada se anula. Apliquemos este resultado a la trayectoria rectangular $ABCD$ de la (Fig.(4.7)(b)). Sobre esta trayectoria, las longitudes AB y CD se considerarán iguales a Δl y los segmentos AD y BC se supondrán despreciablemente pequeños. Por consiguiente

$$\vec{E}_2 \cdot \Delta l + \vec{E}_1 \cdot (-\Delta l) = 0 \implies (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \Delta l = 0, \quad (4.49)$$

en consecuencia, el resultado es

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad (4.50)$$

por lo tanto, la componente tangencial del campo eléctrico es continua al atravesar una zona interfacial. Los resultados anteriores se han obtenido para dos medios dieléctricos arbitrarios. El ejemplo anterior satisface la condición de salto ya que $\vec{E} = 0$ (debajo de la curva separatriz) y $\vec{E} \neq 0$ (arriba de la curva separatriz).

CAPÍTULO 5

Análisis de Curvas con Puntos de Inflexión.

En este capítulo analizamos la influencia de puntos de inflexión en la condición de frontera y como estos modifican la estructura topológica del campo difractado, dicho análisis se hace por medio de la ecuación de Burgers, la cual nos permite describir la estructura topológica del campo mediante leyes de conservación, estas leyes son generadas por ella misma debido a su naturaleza.

En particular se presenta un análisis de una estructura difractante con un perfil geométrico tipo cúbico, la cual contiene un punto de inflexión, este análisis se estudia a través del modelo de espectro angular, explicando como se genera el desdoblamiento de un punto de inflexión y que tipos de efectos se generan, también se presentan resultados experimentales.

5.1. Geometrización de un campo óptico difractado por una curva rendija.

De capítulos anteriores se sabe que si se ilumina un objeto, inmediatamente aparecen efectos de difracción, en esta ocasión se tiene un objeto difractante en el plano $(x - y)$ llamado *curva rendija* la cual se iluminará y generará un campo difractado. Ver Fig.(5.1)

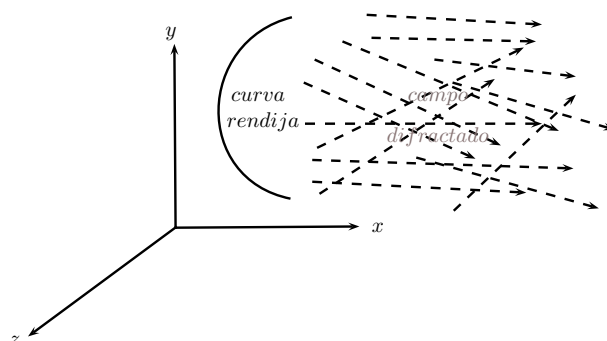


Figura 5.1: Iluminación de una curva rendija.

La idea es geometrizar el campo difractado y como prototipo se usará una curva rendija (*es la condición de frontera definida por el frente de onda que emerge a una familia de trayectorias normales denominadas curvas características las cuales evolucionan a una curva envolvente*), cumpliéndose así el principio de transversalidad, este modelo nos ayuda a que dado un problema tridimensional ($3D$) se mapee a algo bidimensional ($2D$), es decir, el campo difractado en R^3 se ha proyectado a R^2 comúnmente llamado plano ($x - y$), dentro del cual se localiza una superficie, dicha superficie se colapsa a una curva, que en este caso la denominaremos $L = L(u)$, donde inicialmente $L = xu + yv$, pero recuerde que existe una forma funcional $v = v(u)$. Ver Fig.(5.2), en donde $y = h(x)$ es una función *monótona creciente*.

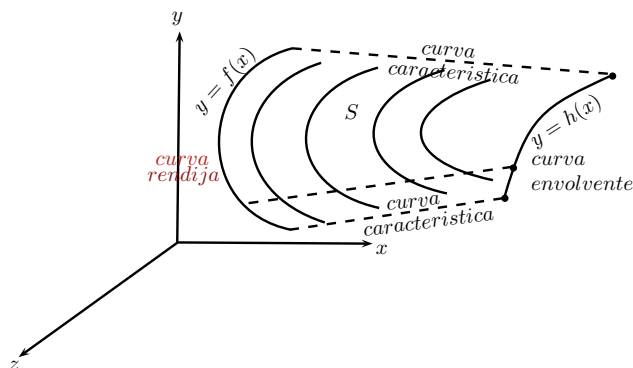


Figura 5.2: Condición de Frontera.

Por otro lado se sabe que las coordenadas cartesianas están dadas en términos de las coordenadas curvilíneas $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$, las cuales caracterizan a la superficie S , sin olvidar que el asunto puede ser invertible, esto último exige que el determinante de la transformación debe ser diferente de cero ($J \neq 0$), solo que existe un pequeño problema, cuando la superficie se colapsa a una curva, esto implica que una curva de rango dos ha evolucionado a una de rango uno. En términos de óptica significa que el campo difractado ha sido comprimido y como resultado se observan procesos de morfogenesis, bifurcación y entropía. Ver capítulo *IV*. Lo anterior nos lleva a que se tiene que hacer un análisis de la síntesis de regiones umbilicas en las cuales se encuentran los llamados *puntos de inflexión*. (Sección 5.3)

De lo anterior podemos afirmar que la condición de transversalidad falla en la región focal (curva $y = h(x)$), pero eso no significa que deje de ser un frente de onda, de hecho ese nuevo frente de onda ha adquirido nuevas propiedades físicas las cuales se discutirán más adelante (dichas propiedades se modelan a través de la ecuación de Burgers). Hasta aquí podemos sintetizar todo lo anterior de una forma muy rigurosa en términos de curvas características.

Dado un sistema, cuya evolución está descrita por una EDP hiperbólica que tiene asociada dos curvas características (comportamiento hiperbólico) evoluciona a una EDP parabólica que asocia a una sola curva característica (comportamiento parabólico).

Del capítulo *III* ya sabíamos que la región hiperbólica tiene asociadas dos asíntotas, cuando estas llegan a ser paralelas generan una región parabólica la cual corresponde a la región de Fraunhofer y también que una superficie óptica es generada por la función de fase. Por ejemplo una ecuación hiperbólica (ecuación de onda) describe cualquier fenómeno ondulatorio, entonces la luz presenta un carácter evanescente en la región focal. Siguiendo con este análisis describimos la siguiente sección.

5.2. Sistema a analizar.

El lector debe estar familiarizado con el lenguaje vectorial (calculo vectorial) en especial con los teoremas de *Stokes* (rotacional) y *Gauss* (divergencia)

los cuales tienen una expresión matemática

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{a}, \text{ Teorema de Stokes.} \quad (5.1)$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv, \text{ Teorema de Gauss.} \quad (5.2)$$

La ec.(5.1) establece que la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie abierta es igual a la integral de línea cerrada del campo vectorial a lo largo del contorno que limita la superficie. Si \vec{F} es una fuerza, entonces $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ es el trabajo realizado para mover una partícula de A a B , asumiremos que \vec{F} puede escribirse como el gradiente de alguna función escalar $\phi(x, y, z)$, esto es, $\vec{F} = \nabla\phi$. Entonces la integral de línea es independiente de la trayectoria a seguir ($A \rightarrow B$), es decir

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A), \quad (5.3)$$

nuestro resultado final de ec.(5.3) depende únicamente de los valores de $\phi(x, y, z)$, si la trayectoria de integración es cerrada, entonces $A = B$, por lo tanto $\phi(B) = \phi(A)$. Así que la integral de línea alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero, sin embargo, dicha región para la cual $\vec{F} = \nabla\phi$ debe ser simplemente conectada.

Una forma equivalente de reescribir lo anterior es que

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \nabla\phi = 0, \quad (5.4)$$

de ec.(5.4) podemos decir que \vec{F} es un campo conservativo o campo irrotacional. Vemos que un campo irrotacional es caracterizado por alguna de las siguientes condiciones

$$\vec{F} = \nabla\phi, \quad (5.5a)$$

$$\nabla\vec{F} = 0, \quad (5.5b)$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (5.5c)$$

cualquiera de estas tres condiciones implica las otras dos. Podríamos pensar ahora que la Fig.(5.2) representa un circuito o trayectoria cerrada, de tal

manera que nos podemos mover sobre ella, como en el caso de una integral de línea, para mayor claridad véase (Fig.(5.3)(a)), obteniendo

$$BA + AA_0 + A_0B_0 + B_0B = 0 \implies AA_0 + B_0B = 0 \implies AA_0 = -B_0B, \quad (5.6)$$

donde $BA = A_0B_0 = 0$ definición de frente de onda. Por lo tanto no hay trabajo realizado, es decir, el campo es conservativo, en términos ópticos, significa que no hay un corrimiento de fase.

Nuevamente regresando a la (Fig.(5.3)(a)), encontramos

$$BA + AA' + A'B' + B'B = 0 \implies A'B' = -AA' - B'B = -(AA' - B'B) = \kappa(R_{B'B} - R_{AA'}) \neq 0, \quad (5.7)$$

existe un corrimiento de fase y por ende esperamos propiedades físicas diferentes a las del resto de el campo. En la literatura es llamada *fase geométrica* que adquiere un sistema al efectuar una trayectoria cerrada, mientras está sujeta a un parámetro que cambia de forma adiabática (curva de singularidad).

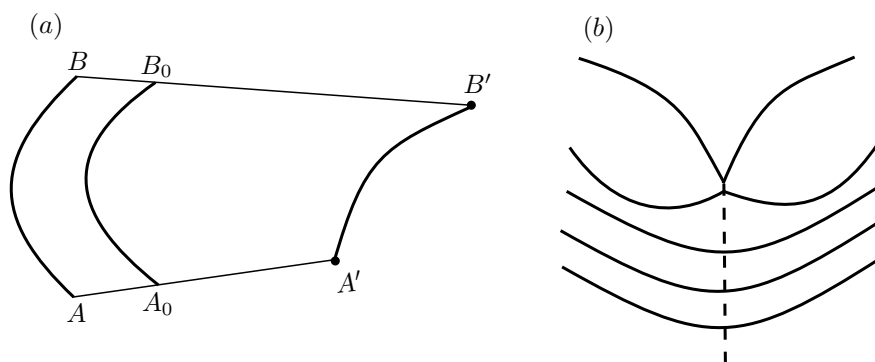


Figura 5.3: (a) Condición de frontera. (b) Generalización de (a).

El anterior análisis sugiere que el teorema de Stokes ya no es valido, debido a que no podemos excluir las singularidades, dicho de otra forma, en este caso no tenemos singularidades aisladas sino se tiene una curva de singularidades.

Imaginemos que se tiene un singularidad (punto umbilico) y este se desdobra en una curva, en la siguiente sección mostramos como aplicar esta idea, en especial a un campo óptico generado por difracción.

5.3. Desdoblamientos de campos ópticos.

Se describe la síntesis de transmitancias que contienen puntos de inflexión (son aquellos en donde la curvatura se invierte), durante los procesos de difracción estos puntos generan regiones umbilicas que desdoblan al campo de difracción en varias ramas generando y controlando efectos de bifurcación. Se muestran resultados experimentales.

En la vecindad de regiones umbilicas se generan procesos no lineales, por ejemplo, es posible modificar localmente el índice de refracción efectivo. En general, las regiones umbilicas corresponden al enfoque tridimensional (3D) y se generan estirando el punto de inflexión de la función de transmitancia. Los puntos de inflexión son los *puntos semilla* que generan regiones umbilicas. Ver (Fig.(5.4)). En la vecindad focal o umbilica se propone que la distribución de la amplitud siga la ecuación de Burgers, esto se debe a que la velocidad de propagación de la onda en esta región tiende a cero, generando así efectos de bifurcación en dichas regiones.

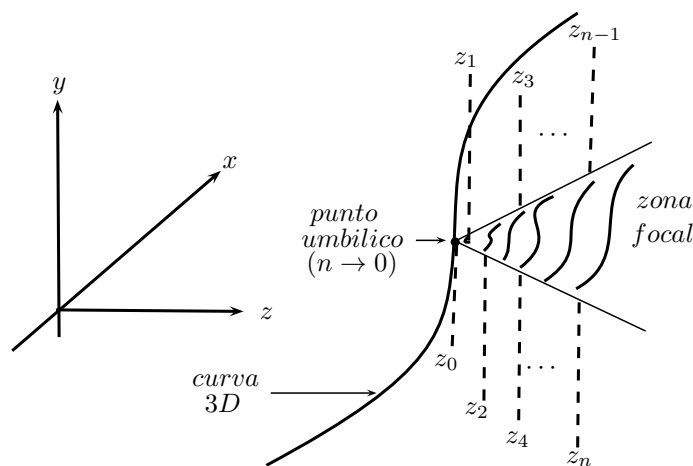


Figura 5.4: Desdoblamiento de un punto umbilico.

Para hacer un estudio más completo, supóngase que se tiene una función de transmitancia tipo curva rendija, en donde la curvatura es el parámetro de control generando efectos de bifurcación, enfocándonos en regiones donde se invierte la curvatura. Durante la propagación del campo óptico, la influencia de los puntos de inflexión generan regiones umbilicas. El campo de difracción en términos del modelo de espectro angular es dado por ec.(2.9)

$$\phi(x, y, z) = \int \int A(u, v) e^{i2\pi(xu+yv+zp)} dudv, \quad (5.8)$$

donde

$$A(u, v) = \delta\left(v - \frac{u^3}{3}\right). \quad (5.9)$$

Despejando p de la ec.(2.8) y tomando una aproximación, resulta

$$p \approx \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{\lambda^2}{2}(u^2 + v^2) \right], \quad (5.10)$$

sustituyendo las ecs.(5.9) y (5.10) en (5.8) se encuentra que el campo es dado por

$$\phi(x, y, z) = e^{ikz} \int \int \delta\left(v - \frac{u^3}{3}\right) e^{i2\pi(xu+yv)} e^{-i\pi\lambda z(u^2+v^2)} dudv, \quad (5.11)$$

donde hemos usado la aproximación paraxial en el espacio frecuencial, integrando con respecto a la coordenada v se obtiene el siguiente campo

$$\phi(x, y, z) = e^{ikz} \int e^{i2\pi(xu+y\frac{u^3}{3})} e^{i\pi\lambda z\left[u^2+\left(\frac{u^3}{3}\right)^2\right]} du, \quad (5.12)$$

si $u \ll 1$, entonces se desprecia el término $\left(\frac{u^3}{3}\right)^2$, identificando a la fase como

$$L = 2\pi \left[xu + y\frac{u^3}{3} - \frac{\lambda z}{2}u^2 \right]. \quad (5.13)$$

Para un análisis de la función de fase, existen dos casos:

- El primer caso consiste en suponer que $z = 0$, por lo tanto la fase se reduce a

$$L = 2\pi \left[xu + y\frac{u^3}{3} \right], \quad (5.14)$$

aplicando la condición extremal la cual es equivalente a pedir que $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$, esto quiere decir que se ha hallado un punto critico. Además se pide que $\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} = 0$,

generando así la curva envolvente. Suponemos que se cumple lo anterior, esto significa que x e y tienen que ser cero, entonces en $z = 0$ solamente hay un punto, este es el punto umbilico o semilla. Ver Fig.(5.5 (a)).

•• El segundo caso es cuando el campo óptico se propaga, es decir, $z \neq 0$, por lo que la fase adquiere la forma de ec.(5.13). Existe un desdoblamiento del punto umbilico (ver Fig.(5.5)(b)).

Nuevamente aplicando la condición de extremal y envolvente se encuentra

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \implies x + yu^2 - \lambda zu = 0, \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} = 0 \implies 2yu - \lambda z = 0, \tag{5.16}$$

despejando u de la ec.(5.16) y sustituyéndola en la ec.(5.15) se obtiene

$$y = \left(\frac{\lambda z}{2}\right)^2 \frac{1}{x}, \tag{5.17}$$

donde la ec.(5.17) representa una curva en forma de adiabática (comparar con las ecs.(A.3) y (A.4) apéndice A) en el plano $(x - y)$, dado que z es una constante podemos notar que el campo óptico se organiza en dichas curvas y existen zonas prohibidas. Ver (Fig.(5.5)(c))

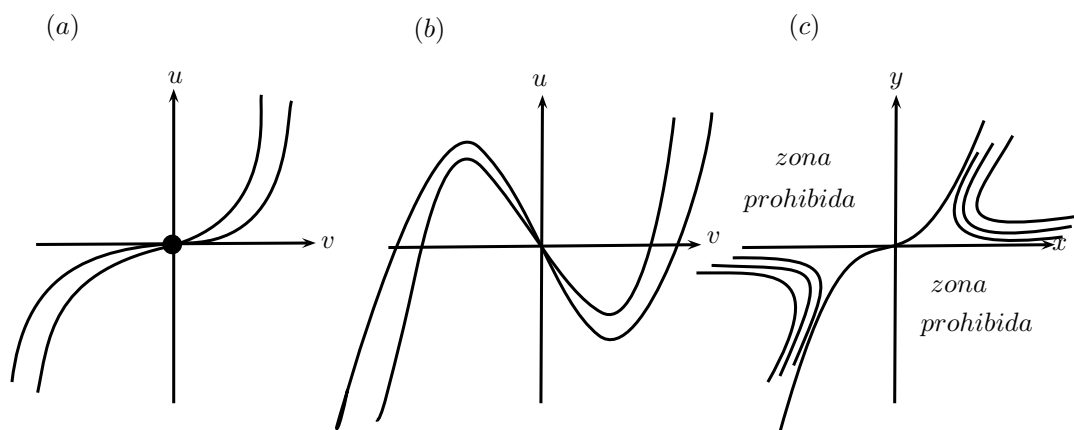


Figura 5.5: (a) Punto umbilico. (b) Desdoblamiento del punto umbilico y (c) Zonas donde se organiza el campo.

A continuación se muestran resultados experimentales

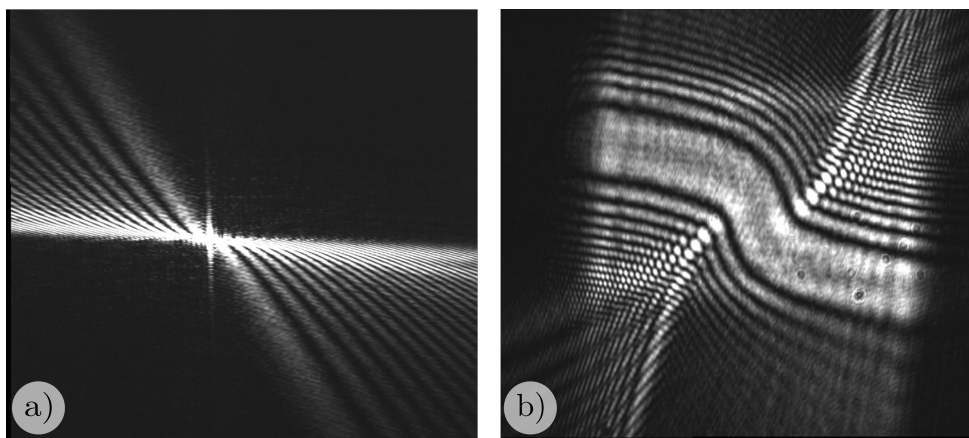


Figura 5.6: (a) Bifurcación del campo (b) Zonas donde se organiza el campo.

A partir de los resultados experimentales se identifica que el campo de difracción tiene estructura local tipo placa zonal. Debe observarse que los puntos de inflexión en la condición de frontera se desdoblán en el campo de difracción generando superficies umbilicales que presenta efectos de bifurcación.

5.4. Análisis de campos ópticos con una ecuación tipo Burgers.

Se propone describir las propiedades de un campo óptico a través de leyes de conservación, esto podría explicar el origen de procesos difractivos. El modelo se basa en asociar al campo una ecuación diferencial tipo Burgers ec.(5.18), la razón se debe a que esta permite identificar regiones en donde el efecto ondulatorio se pierde, ejemplos de estos ocurren en la fase adiabática propuesta por Berry.

$$\beta_t + \beta^\alpha \beta_x = 0, \quad (5.18)$$

donde α es un parámetro que define un posible escalamiento. La ec.(5.18) es equivalente a una ecuación de Burgers, dada una transformación $\beta = u^{\frac{1}{\alpha}}$ hallamos la ec.(4.21) que puede ser generalizada a ec.(4.31) la cual representa n

leyes de conservación asociadas a un sistema físico o en nuestro caso un campo difractado. Si u satisface la ec.(4.21) y esta se sustituye en la transformación propuesta, la ec.(5.18) se satisface, es decir, ambas ecuaciones describen al mismo estado y por lo tanto la misma física.

Utilizando la ecuación de Burgers podemos definir un campo \vec{G} tal que

$$\vec{G} = \left(u^n, \frac{n}{n+1} u^{n+1} \right), \quad (5.19)$$

donde \vec{G} representa la geometría de las franjas de difracción .

Calculando su divergencia a \vec{G} , encontramos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{G} &= nu^{n-1}(u_t + uu_x), \\ \text{si } u &\text{ satisface la ecuación de Burgers,} \\ \implies \nabla \cdot \vec{G} &= 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Por otra parte podemos escribir a \vec{G} en términos de curvas paramétricas como $\vec{G} = (x, y)$, donde

$$x = u^n, \quad y = \frac{n}{n+1} u^{n+1}, \quad (5.21a)$$

$$y = \frac{n}{n+1} \left(x^{\frac{n+1}{n}} \right), \quad (5.21b)$$

con $n \in \mathfrak{R}$, $n \neq 0, -1$.

Las ecs.(5.21)(a) y (b) generan una familia de curvas en el plano $(x - y)$. A continuación presentamos algunos ejemplos de interés.

- Para $n = \frac{1}{2}$, tenemos

$$x = u^{\frac{1}{2}} \implies y = \frac{1}{3} x^3, \quad (5.22)$$

la última expresión es de tipo cubico, la cual corresponde a la geometría de las franjas observadas en la región focal de nuestro análisis (región de Fraunhofer). Ver Fig(5.6 (a)), además tiene la misma estructura que ec.(3.20). Siguiendo la misma línea de pensamiento se encuentra

- • Si $n = -\frac{1}{2}$, obtenemos

$$x = u^{-\frac{1}{2}} \iff y = -\frac{1}{x}, \quad (5.23)$$

la ec.(5.23) es equivalente a la ec.(5.17), esta representa la geometría de las franjas observadas fuera de la región focal de nuestro análisis (región de Fresnel). Ver Fig.(5.6 (b)).

Otros ejemplos presentados son los siguientes:

- • • Para $n = 1$, tenemos

$$x = u \implies y = \frac{1}{2}x^2, \quad (5.24)$$

note que la ec.(5.24) es equivalente a la ec.(3.19) la cual fue discutida en el capítulo *III*.

- • • • Nuevamente si $n=2$, obtenemos

$$\begin{aligned} x = u^2 \implies y &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \\ \implies y^2 &= \frac{4}{9}x^3, \end{aligned} \quad (5.25)$$

la ec.(5.25) es equivalente a ec.(3.21), los dos casos anteriores corresponden a la proyección de una curva 3D en los planos osculador y normal. Ver (Fig.(3.7(b))), en esta situación las proyecciones son sobre el plano $(x - y)$. Sucesivamente se puede hallar toda una gama de curvas paramétricas que cubren o llenan todo el plano, esto se logra únicamente variando n . Ver Fig.(5.7)

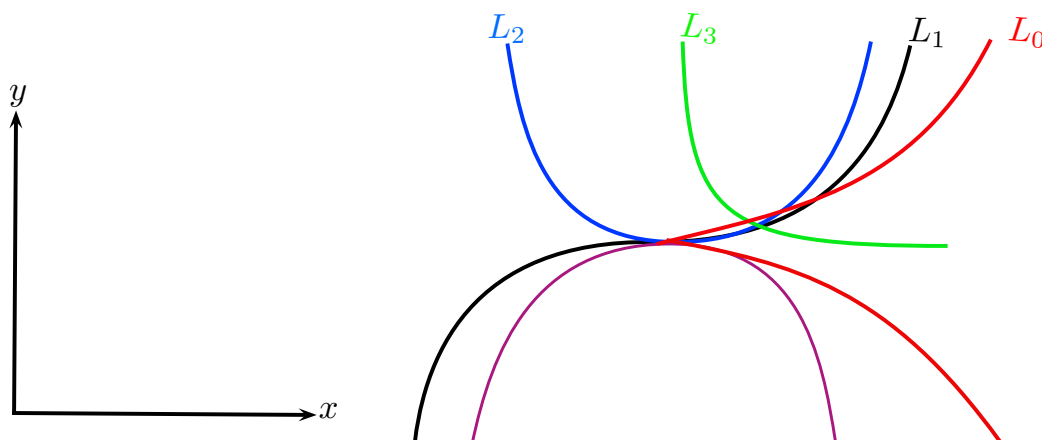


Figura 5.7: Franjas de interferencia asociadas a las leyes de conservación.

Otra situación que se puede observar de la figura anterior es que podemos introducir el concepto de cinemática (intuitivamente), es decir, ¿ Cómo nos movemos de una curva a otra o en ella misma? una posible interpretación es la siguiente.

Imaginemos que L_1 representa la evolución de un frente de onda, conforme nos movemos sobre ella misma, el efecto ondulatorio se va perdiendo cuando nos acercamos a el punto de inflexión (el cual se desdobra generando un contacto de orden dos) surgiendo así un efecto difusivo y nuevamente pasamos de un efecto difusión-onda.

Si queremos movernos de una curva L_0 a L_2 pasa algo similar al caso anterior, se encuentra un efecto onda-difusión y viceversa. Además se dice que estas curvas son *topológicamente equivalentes*, esto significa que las curvas tienen un punto de inflexión, lo interesante de esto es que no representan la misma física.

Para concluir el capítulo, pensemos que cada una de las curvas L_0, L_1, \dots, L_n van a representar leyes de conservación asociadas a la ecuación de Burgers, por instancia vamos a suponer que dichas curvas son mapeadas a la superficie donde vive u que es solución a la ec.(4.21), una posible interpretación geométrica es aquella en la cual si nos movemos sobre la curva situada en el plano $(x - y)$, la diferencia de alturas es la misma para todos los puntos sobre la superficie generada por $u = u(x, t) = cte$.

CAPÍTULO 6

Conclusiones.

En este trabajo de tesis se presentó un estudio a través de transmitancias que contienen puntos de inflexión cuyo campo difractado evoluciona generando regiones en donde la función de curvatura cambia de signo, estas regiones se conocen como zonas umbilicas o focales.

Las propiedades físicas del campo óptico en la vecindad focal presentan comportamientos que se modelaron con la **ecuación diferencial de Burgers**, esta permitió describir la estructura topológica del campo mediante leyes de conservación y son generadas de forma natural por ella misma. Se mostraron resultados experimentales de la generación de superficies umbilicas.

Los resultados más relevantes de esta tesis son los siguientes:

▷ El análisis de desdoblamientos de campos ópticos se hizo a través del modelo de espectro angular, donde el campo óptico es definido por

$$\phi(x, y, z) = \int \int A(u, v) e^{i2\pi(xu+yv+zp)} dudv, \quad (6.1)$$

la expresión anterior nos permitió identificar la función de fase, esta posee un comportamiento extremal, permitiéndonos describir la evolución del campo óptico, mostrando la síntesis de campos ópticos que se organizan alrededor de las regiones umbilicales generadas por los puntos de inflexión en la con-

dición de frontera. En estas regiones los campos ópticos presentan efectos de bifurcación. Los resultados experimentales concuerdan con el modelo teórico.

▷ Posteriormente se introdujo una ecuación tipo Burgers, esta nos conduce a la ecuación diferencial de Burgers, la cual nos permitió describir la estructura topológica del campo mediante leyes de conservación.

$$u_t + uu_x = 0. \tag{6.2}$$

con ayuda de la anterior ecuación se logro establecer un paralelismo entre las leyes de conservación asociadas a la ecuación de Burgers con la estructura de franjas del campo difractado.

APÉNDICE A

Análisis de la ecuación 2.41

Dada la ec.(2.41), la cual describe a la función de fase asociada a un campo óptico tiene un paralelismo a los modelos de termodinámica, ya que en el contexto óptico la función de fase es definida como

$$L = K = x^{\alpha-1}y^\alpha, \quad (\text{A.1})$$

donde K es una constante, cumpliéndose así la condición adiabática, lo que significa en términos termodinámicos que

$$PV^\gamma = K, \quad (\text{A.2})$$

con $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, donde C_p y C_v se conocen como capacidades caloríficas a presión constante y volumen constante respectivamente.

Por otro lado reescribiendo las ecs.(A.1) y (A.2) de tal forma que

$$y = \frac{k_2}{x^\beta}, \quad (\text{A.3})$$

$$P = \frac{K}{V^\gamma}, \quad (\text{A.4})$$

donde $k_2 = K^{\frac{1}{\alpha}}$ y $\beta = 1 - \frac{1}{\alpha}$.

Comparando las ecs.(A.3) y (A.4) tiene la misma estructura, generando curvas adiabáticas. Ver (Fig.(A.1)(a)). En el contexto termodinámico una curva adiabática conecta dos isotermas (Fig.(A.1)(b)) realizando el ciclo de Carnot.

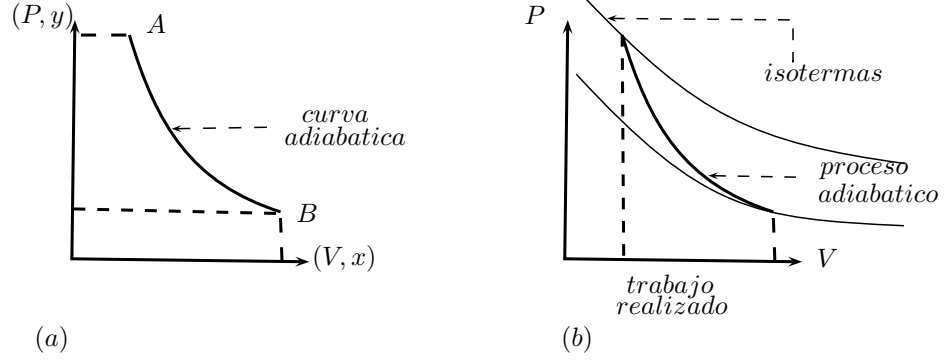


Figura A.1: (a) Curva adiabática. (b) Conexión de dos isotermas a través de una adiabática.

Regresando a la ec.(A.1), uno puede verificar que L satisface la ec.(2.41), es decir

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}y^{1-\alpha}, \quad (\text{A.5a})$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -\alpha(1 - \alpha)x^\alpha y^{-1-\alpha}, \quad (\text{A.5b})$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \alpha(1 - \alpha)x^{\alpha-1}y^{-\alpha}, \quad (\text{A.5c})$$

sustituyendo las ecs.(A.5a), (A.5b) y (A.5c) en ec.(2.41), se satisface, por lo tanto L es solución.

Bibliografía

- [1] GEORGE B. ARFKEN and HANS J. WEBER *Mathematical methods for physicists*, (6th ed. ELSEVIER ACADEMIC PRESS, San Diego, California, 2005).
- [2] MORRIS W. HIRSCH, STHEPEN SMALE and ROBERT L. DEVANEY, *Differential equations, dynamical system and an introduction to chaos*, (2nd ed. ELSEVIER ACADEMIC PRESS, San Diego, California, 2004).
- [3] E. J. BELTRAMI, *Mathematics for dynamic modeling*, (2nd ed. Academic Press., Inc., Boston, 1987).
- [4] ROBERT GILMORE, *Catastrophe theory for scientists and engineers*, (1st ed. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1981).
- [5] M. V. BERRY and C. UPSTILL, *Catastrophe optics morphologies of caustics and their diffractions patterns*, (Progress in optics XVIII, North Holland 257-323, 1980).
- [6] M. BORN and E. WOLF, *Principles of optics*, (7th ed. Cambridge Press, 1999).
- [7] EUGENE HECHT, *optics*, (4th ed. Addison Wesley, USA, 2002).
- [8] L. ELSGOLTZ, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, (Editorial MIR MOSCU, 1969).

-
- [9] DIRK J. STRUIK, *Lectures on classical differential geometry*, (2nd ed. Dover Publications, Inc., New York, 1961).
- [10] JOHN M. LEE, *Riemannian Manifolds an introduction to curvature* , (Springer-Verlag, Inc., New York, 1997).
- [11] BARRETT O'NEILL, *Elementary differential geometry*, (2nd ed. ELSEVIER ACADEMIC PRESS, San Diego, California, 1966).
- [12] JERROLD E. MARSDEN and ANTHONY J. TROMBA, *Cálculo vectorial*, (3ra edición (versión en español), Addison Wesley Iberoamericana, S. A., USA, 1991).
- [13] HARRY LASS, *Vectors and tensor analysis* , (McGraw-hill, Inc., USA, 1950).
- [14] P. PRASAD, *Non linear hyperbolic waves in multi-dimension*, (chapman and Hall/CRC, monographs and survey in pure and applied mathematics, 2001).
- [15] G. B. WHITHAM, *Linear and nonlinear waves* , (1st ed. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974).
- [16] P. R. GARABEDIAN, *Partial differential equations* , (3rd ed. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967).